Ugeseddel 7.

Program. I den syvende uge, 17/3-21/3, indledes studiet af gruppers virkning, fra GRP7. Ugens opgaver er følgende: GRP4: 6, 7, 8, **10**; GRP5: 1, 2, 3, 5, 6*, 7, 10, 13, 18, **22**; UO: 5.

[I forhold til den oprindelige plan er GRP3:16 og GRP5:21 fjernet, og opgaverne GRP4:7 og GRP5:5 er ikke længere til skriftlig aflevering.]

I den sjette uge gennemgik jeg GRP5 (resten) og GRP6. GRP6 (Struktursætningen) er kursorisk.

Køreplan for første obligatoriske opgave. Husk, at du skal være tilmeldt! Opgaven afleveres senest 14/3 kl 12.00, og den er rettet senest til øvelserne 24–26/3. Godkendes den ikke, skal den genafleveres senest ved øvelserne 31/3–2/4.

Nøgleord: Isomorfisætningen, Noether's første og anden isomorfisætning, direkte produkt af grupper, maksimal elementorden, Struktursætning for endelige kommutative grupper.

Kommentar. Det er let at tro på, at homomorfier og isomorfier mellem grupper er naturlige og rimelige begreber; de er oplagte generalisationer af tilsvarende begreber kendt for afbildninger mellem vektorrum. Det er nok lidt sværere at indse fornuften i og betydningen af de sætninger, vi viser i GRP5. Min erfaring er, at dette bedst indses efter at man er blevet fortrolig med anvendelserne. Så fortvivl ikke, forståelsen kommer senere. Homomorfisætningen, i standardanvendelsen GRP(5.7), fortæller, hvordan man definerer homomorfier *fra* en kvotientgruppe G/N: ingrediensen er en homomorfi fra G, som forsvinder på N. Isomorfisætningen er central. Den indgik i beviserne for Noether's to isomorfisætninger. Bemærk, at Noether's første isomorfi, sammen med Lagrange's indexsætning, giver følgende lighed mellem gruppernes orden:

$$|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|. \tag{1}$$

Bemærk også, at Noether's første isomorfi, for en *kommutativ* additivt skrevet gruppe G og undergrupper H og K af G, er en isomorfi,

$$H/(H \cap K) \xrightarrow{\sim} (H + K)/K. \tag{2}$$

Her, og flere steder i noterne, er afbildningspilen markeret $\xrightarrow{\sim}$; det antyder blot, at afbildningen er bijektiv. Specielt kan G her være et vektorrum, og H og K kan være underrum. I dette tilfælde er også $H \cap K$ og $H + K$ underrum. Her giver ligningen (1) ikke megen information, idet grupperne er uendelige, men ligningen er *analog med* følgende ligning:

$$\dim(H + K) + \dim(H \cap K) = \dim H + \dim K.$$

Den kaldes også Grassmann's dimensionsformel.

Noether's anden Isomorfisætning anvendes oftes på homomorfien $G \to G/N$ for en given normal undergruppe N; her fås en beskrivelse af samtlige undergrupper i G/N, herunder, at enhver normal undergruppe af G/N har formen K/N for en entydig normal undergruppe K af G med $N \subseteq K$. Isomorfien i sætningen er en isomorfi $G/K \xrightarrow{\sim} (G/N)/(K/N)$.

Kapitel GRP6 er kursorisk; ved eksamen forudsættes altså kun kendskab begreber og resultater (og til eksempler), men ikke til beviserne. Hovedresultatet er Struktursætningen (6.12). Det kræves specielt, at man kan anvende hovedresultatet til at bestemme samtlig abelske grupper af en given orden. „Abelsk" (om en gruppe) er helt synonymt med „kommutativ".

Kuglerne.
• *Isomorfisætning.* Homomorfi $\varphi\colon G \to G'$ giver isomorfi $G/\varphi^{-1}(e') \xrightarrow{\sim} \varphi(G)$.

• *Noether's første.* $H/(H \cap K) \xrightarrow{\sim} HK/K$.

• *Noether's anden.* $(G/K)/(N/K) = G/N$, når $N \supseteq K$ er normale undergrupper af G.

• *Struktursætning.* Enhver endelig abelsk gruppe G er et produkt af cykliske grupper, $G = \mathrm{C}_{m_1} \times \cdots \times \mathrm{C}_{m_r}$. Ordenerne m_i kan vælges som primtalspotenser, og „så" er fremstillingen entydig.

• *Den maksimale elementorden*, $d_{\max}$, for en endelig gruppe G, er blot den største orden af et element i G. Det er værd at vide, for en kommutativ gruppe G, at enhver elementorden er divisor i $d_{\max}$.

Kommutativiteten er nødvendig: I S_3 er 3 den maksimale elementorden, men der findes også permutationer af orden 2.

• *Polygongruppen* $\mathcal{P} = \mathcal{F}/\mathcal{N}$ blev defineret ved brutal tvang: $\mathcal{F}$ er den frie gruppe af polygoner med multiplicitet, bestående af udtryk (fx) af formen $P + 5T - R - S$, og $\mathcal{N}$ er den mindste undergruppe af $\mathcal{F}$, som indeholder alle udtryk i følgende liste:

$$P - P_1 - P_2,\ P \text{ er klippet i } P_1 \text{ og } P_2, \qquad Q - P,\ Q \text{ er et flyttet eksemplar af } P.$$

At disse udtryk ligger i $\mathcal{N}$ betyder, at når der regnes med restklasser modulo $\mathcal{N}$, så har vi gennemtvunget det ønskede: $\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$ og $\overline{Q} = \overline{P}$.

Tilbage er så spørgsmålet: er der overhovedet noget interessant tilbage i $\mathcal{P}$? Kunne det ikke tænkes, at $\mathcal{P} = 0$, altså at undergruppen $\mathcal{N}$ var hele $\mathcal{F}$? Nej, for vi bemærker, at enhver afbildning $P \mapsto v(P)$, fra mængden af polygoner til (fx) $\mathbb{R}$, bestemmer en homomorfi $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$; denne homomorfi forsvinder på udtrykkene i listen, præcis når der gælder, under forudsætninger som i listen,

$$v(P) = v(P_1) + v(P_2), \quad v(Q) = v(P). \tag{*}$$

Er dette opfyldt, følger det af Homomorfisætningen, at v definerer en homomorfi fra kvotienten, $\bar{v}\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$. Nuvel, tag som v arealet af polygoner. Så er (*) opfyldet. Heraf fås en homomorfi $\bar{v}\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, øjensynlig surjektiv. Og så er $\mathcal{P} = 0$ naturligvis udelukket.

Det er ikke så svært at vise, at $\bar{v}\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ faktisk er en isomorfi. „Gælder det også i 3 dimensioner, for polyedre og rumfang?", er faktisk et af Hilbert's berømte 23 problemer (fra 1900). Men det skulle nok ikke have været med; det er ikke *så* dybtliggende, at svaret er nej.

Hvornår var det nu det var? Niels Henrik Abel 1802–1829, Hermann Günter Grassmann 1809–1877, David Hilbert 1862–1943, Emmy Noether 1882–1935.

På sigt: Den ottende uge, 24/3-28/3, har overskriften „Gruppevirkning; Sylow's sætninger", fra GRP7-8. Ugens øvelser er GRP5: 9, 15, **23**, 24; GRP6: 1, 5, **6**; GRP7: 1, 3, 4, 5; UO: 10*, 11, 12*, 13.

Anders Thorup