Ugeseddel 6.

Program. I den sjette uge, 10/3-14/3, er overskriften „Isomorfisætninger, Struktursætningen“, med materiale fra GRP5 og 6. Ugens øvelser er **obl 1**; GRP1: 16; GRP2: 4; GRP3: 4, 5; GRP4: 1, 2, 4, 5, 11, 12, 13, 14, 17*; aflevering af den første obligatoriske opgave skal ske senest fredag den 14. marts kl 12 i instruktorens box.

I den femte uge gennemgik jeg GRP4 (resten) og GRP(5.1)–(5.7).

Nøgleord: Højre- og venstre-sideklasse, normal undergruppe, kvotientgruppe, homomorfi, kerne, billedgruppe, isomorfi, Homomorfisætningen.

Kommentar.

Påstand. *Når H er en undergruppe af en gruppe G, defineres en komposition '$*$' i mængden G/H af sideklasser ved ligningen,*

(1) $$(g_1H) * (g_2H) = g_1g_2H.$$

Kompositionen er associativ, sideklassen $H = eH$ er det neutrale element, og den inverse til gH er $g^{-1}H$. Mængden G/H af sideklasser er altså en gruppe.

For eksempel, for at vise, at '$*$' er associativ, skal man vise, at $(g_1H * g_2H) * g_3H = g_1H * (g_2H * g_3H)$, og det følger af definitionen, idet begge sider af lighedstegnet bliver $g_1g_2g_3H$.

Ak, påstanden er gal! Det er nemlig *ikke* rigtigt, at ligningen (1) bestemmer en komposition i sideklasserne. Problemet er, at en sideklasse har mange betegnelser. Fx er $eH = hH$ for et vilkårligt element $h \in H$. For en komposition $*$ i G/H må $(eH) * (gH)$ og $(hH) * (gH)$ altså være samme sideklasse. Hvis (1) skal være opfyldt, må denne sideklasse være både gH og hgH. Det må altså være en forudsætning for påstanden, at $gH = hgH$ for alle $g \in G$ og $h \in H$. Denne forudsætning er faktisk præcis, at H skal være en normal undergruppe.

For en *normal* undergruppe N af G er påstanden altså korrekt: konstruktionen fører til *kvotientgruppen* G/N. Lad os fremhæve, at det næsten aldrig kan betale sig at tænke på, at hvert element i G/N er en delmængde af G. Man skal snarere tænke på gN i G/N som et element knyttet til $g \in G$ via den kanoniske surjektive afbildning $g \mapsto gN$. Det interessante er, hvordan man regner med disse „tilknyttede“ elementer og det beskrives i (1), samt at to elementer har det samme tilknyttede element, $g_1N = g_2N$, hvis og kun $g_1^{-1}g_2 \in N$. Det tilknyttede element kan betegnes $\bar{g}$, eller $[g]$, eller . . . .

Endelig betragtede vi homomorfier, der er for grupper hvad de lineære afbildninger er for vektorrum. Jeg omtalte kort Homomorfisætningen, — og brugte lang tid på eksempler.

Kuglerne.

• *Hø, Hø!* Sideklassen gH kaldes mere præcist for venstresideklassen, der indeholder g. Delmængden Hg er højresideklassen. Huskeregel: [Hø er en højresidklasse]. (Lad mig tilstå, at matematikerne nok er enige om, at der er to slags sideklasser, men de er ikke helt enige om hvilken slags, der er dem „til venstre“. Delmængden gH kan jo siges at fremkomme af H ved at gange g på fra venstre, eller at fremkomme af g ved at gange alle elementer fra H på g fra højre. En gennemsøgning af litteraturen viser en overvægt af Hø=højresideklasse.)

• *I en kommutativ*, additivt skrevet gruppe G er enhver undergruppe H normal. Sideklassen, der indeholder g, er $g + H$.

• *Fællesmængde* af normale undergrupper $N_\alpha \subseteq G$, altså $\bigcap_\alpha N_\alpha$, er igen en normal undergruppe. Specielt er der for enhver delmængde $X \subseteq G$ en mindste normal undergruppe som omfatter X, nemlig fællesmængden af alle normale undergrupper, der omfatter X.

• *En injektiv homomorfi* er karakteriseret ved sin trivielle kerne: $\varphi\colon G \to G'$ er injektiv, hvis og kun hvis $\varphi^{-1}(e') = \{e\}$.

• *Homomorfisætning. En homomorfi $\varphi\colon G \to G'$, med $\varphi(N) = \{e'\}$, bestemmer en homomorfi $\bar\varphi\colon G/N \to G'$ med $\bar\varphi(gN) = \varphi(g)$.*

• *Man kan tvinge sine ønsker igennem*, hvis man kan nøjes med en kvotientgruppe. Antag fx, at dit højeste ønske er at kunne addere polygoner (plane figurer) på en sådan måde, at hvis en polygon P med en saks klippes i polygoner P_1 og P_2, så er $P = P_1 + P_2$.

Først må vi sørge for at polygonerne ligger i en gruppe: Hvis vi har en (kommutativ additivt skrevet) gruppe $\mathcal{P}$, som indeholder alle polygoner, så kunne vi, hvis P, R, S, T er polygoner fx betragte udtrykket $P + 5T - R - S$ i denne gruppe. Den vidunderlige konstruktion af en gruppe, der omfatter alle polygoner, er nu, at vi *definerer* den frie gruppe af polygoner som gruppen $\mathcal{F}$ bestående af alle sådanne „formelle“ udtryk. I udtrykket ovenfor siger man også, at P forekommer med multiplicitet 1, at T forekommer med multiplicitet 5, og at R og S forekommer med multiplicitet -1. Addition i $\mathcal{F}$, altså summen af to sådanne udtryk, defines ved addition af multipliciteterne.

Selv om det måske føles som snyd, så har vi nu en gruppe, hvor vi kan addere polygoner. Det med saksen mangler dog stadig: hvis P klippes i stykker til P_1 og P_2, så er P forskellig fra $P_1 + P_2$, idet $P - P_1 - P_2$ *ikke* er lig med nul-elementet i gruppen $\mathcal{F}$. Men det sidste kan vi let få opfyldt! – i hvert fald i en kvotientgruppe:

$$\mathcal{P} := \mathcal{F}/\mathcal{N},$$

hvor $\mathcal{N}$ er den mindste undergruppe i $\mathcal{F}$, som omfatter alle udtryk $P - P_1 - P_2$, hvor polygonen P er klippet i stykker til P_1 og P_2. I kvotientgruppen $\mathcal{P}$ er der stadig for hvert polyeder P et tilsvarende element $\overline{P}$, nemlig sideklassen der indeholder P. Ifølge konstruktionen ligger elementet $P - P_1 - P_2$ i $\mathcal{N}$, så sideklassen, der indeholder dette element er 0. Men det betyder, at vi har følgende ligning mellem sideklasser: $\overline{P} - \overline{P}_1 - \overline{P}_2 = 0$, altså

$$\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 \quad \text{i gruppen } \mathcal{P}.$$

Hvis Q fremgår af P ved en flytning, så er P og Q i en vis forstand „den samme polygon“. Det kan vi give en præcis mening ved at tilføje alle sådanne differenser $Q - P$ til listen over udtryk i $\mathcal{N}$, idet vi så har $\overline{Q} = \overline{P}$ i gruppen $\mathcal{P}$. [Fortsættes på næste ugeseddel!]

På sigt: I den syvende uge, 17/3-21/3, indleder vi studiet af gruppers virkning, fra GRP7. På hjemmesiden var antallet af opgaver til denne uge ret så overvældende. Det er nu skåret ned til følgende: GRP4: 6, 7, 8, **10**; GRP5: 1, 2, 3, 5, 6*, 7, 10, 13, 18, **22**; UO: 5.

[I forhold til den oprindelige plan er GRP3:16 og GRP5:21 fjernet, og opgaverne GRP4:7 og GRP5:5 er ikke længere til skriftlig aflevering.]

Anders Thorup