Ugeseddel 4.

Program. I den fjerde uge, 24/2-28/2, er overskriften „Cyklisk gruppe; sideklasse“ med materiale fra GRP3-4. Ugens øvelser er TAL3: 15*; TAL6: **11**; GRP1: 1, 3, 6, 20; GRP2: 1, **2**, 3, 5, 6, 7, 9, 10; UO: 1*. [UO] referer til de ekstra ugeopgaver. De findes under „Undervisningsmateriale“ på kursets hjemmeside. På hjemmesiden kan du i øvrigt også finde [pensum03]. Det mangler endnu godkendelse af Studienævnet.

I den tredie uge gennemgik jeg GRP2, og GRP(3.1)-(3.8).

Nøgleord: permutation, permutationsgruppe, identiteten, den symmetriske gruppe S_n, tabelnotation og direkte notation, fixpunkt, disjunkte permutationer, p-cykel, cykelnotation, transposition, baner for permutation, cykelfremstilling, Cykelsætning, cykeltype, dobbelttransposition, fortegn, lige og ulige permutation, den alternerende gruppe A_n, undergruppe, trivielle undergrupper, ægte undergruppe, potens af element, potensreglerne, orden af g, cykliske undergruppe $\langle g\rangle$, cyklisk gruppe.

Kommentar. I daglig tale siger vi, at sættet (b, d, c, e, a) er en permutation af sættet (a, b, c, d, e). Men hvilken permutation er der tale om? Og er det overhovedet en permutation, hvis fx $a = b$? I matematisk forstand skal en permutation være en bijektiv afbildning $\sigma\colon X \to X$ af en mængde på sig selv, så et godt spørgsmål er: hvad er X?

Pointen er, at den permutation i matematisk forstand, der beskriver det første sæt ud fra det sidste, er en permutation af pladserne, og ikke en permutation af de symboler, der står på pladserne. Pladserne er naturligt nummereret $1, 2, 3, 4, 5$, og den efterlyste permutation σ er den permutation af pladserne (dvs $\sigma \in S_5$), som beskriver, at symbolet a er flyttet fra plads nummer 1 til plads nummer 5 (dvs $\sigma(1) = 5$, at symbolet b er flyttet fra plads nummer 2 til plads nummer 1 (dvs $\sigma(2) = 1$), at symbolet c er forblevet på plads nummer 3 (dvs $\sigma(3) = 3$), osv. Når symbolerne er forskellige, er permutationen af pladserne entydig. Er nogle af symbolerne ens, er der flere muligheder. Det er en tilsvarende brug permutationer, der beskriver 15-spillet i GRP(2.25).

For et element g i gruppen G betragtes potenserne $e = g^0$, $g = g^1$, g^2, g^3, osv. *Enten* er alle potenserne forskellige. I dette tilfælde har g uendelig orden. *Eller* de er ikke alle forskellige. I dette tilfælde viste vi, at der findes en eksponent $n > 0$ så at $g^n = e$; den mindste sådanne eksponent er ordenen af g.

Potenserne af g (incl dem med negativ eksponent) udgør den cykliske undergruppe $\langle g\rangle$. Hvis g har uendelig orden, har undergruppen $\langle g\rangle$ også uendelig orden. Hvis g har orden n, består $\langle g\rangle$ af de n forskellige potenser $e, g, \dots, g^{n-1}$.

Kuglerne.

• *Cykelsætning. Enhver permutation σ af en endelig mængde X kan (entydigt) skrives som produkt af disjunkte cykler.* Resultatet er fundamentalt for bogens fremstilling af permutationer. Cyklerne hører til *banerne* for σ: Man kan „se“ banerne, når man for hvert x i X tænker sig afsat en pil fra x til $\sigma(x)$. Der går så en pil fra x_0 til $x_1 := \sigma(x_0)$, fra x_1 til $x_2 := \sigma(x_1)$ osv, og banen gennem x_0 består af de elementer man kommer til fra x_0 ved at følge pilene (gør man det, kommer man i øvrigt igen tilbage til x_0). Specielt er en permutation en *cykel*, når man kun kan „se“ præcis én bane, dvs når alle elementer uden for en enkelt bane er fixpunkter.

• *Hovedresultat. Enhver permutation er et produkt af transpositioner.* For en p-cykel har man fx følgende fremstilling med $p-1$ transpositioner:

$$(x_1\ x_2\ \dots\ x_p) = (x_1\ x_p)\cdots(x_1\ x_3)(x_1\ x_2).$$

• *Fortegnet*, $\operatorname{sign}(\sigma)$, er ret teknisk defineret. Men egentlig er det nok at huske, at en p-cykel har fortegnet $(-1)^{p-1}$ (specielt har en transposition fortegnet -1) og at der gælder ligningen $\operatorname{sign}(\mu\sigma) = \operatorname{sign}(\mu)\operatorname{sign}(\sigma)$. Herefter fås inddelingen af permutationer i lige og ulige, og specielt undergruppen A_n af lige permutationer. Halvdelen (når $n \geqslant 2$) af permutationerne er lige.

• *Ordenen* af et element g i en gruppe, betegnet $|g|$, er det første $n = 1, 2, 3, \dots$ for hvilket $g^n = e$; hvis intet sådant n findes, sættes ordenen til ∞. Det er værd at vide, at når g har orden n, så indeholder den cykliske gruppe $\langle g\rangle$, bestående af potenserne af g, præcis n elementer:

$$\langle g\rangle = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}.$$

På sigt: I den femte uge, 3/3-7/3, er overskriften „Sideklasse; homomorfi og isomorfi“ med materiale fra GRP4-5. Ugens øvelser er: TAL6: 1, 2; GRP1: 4; GRP3: 1, 2, 3, **6**, 7, 8, 9, **10**, 12, 14, 15; UO: 3, 4*.

For at gå til eksamen i Matematik 2AL kræves, at man har fået godkendt de to hjemmeopgaver, der stilles i løbet af semestret (eller har fået dem godkendt i 2002). Man kan dog ansøge Studienævnet om dispensation fra dette krav senest den 1. marts. Studienævnets eventuelle dispensation vil betyde, at den pågældende studerende opgiver *fuldt pensum* til eksamen således at også beviserne i de kursoriske afsnit indgår i pensum.

Den første obligatoriske opgave udleveres i begyndelsen af den femte uge. Den skal afleveres i slutningen af den sjette uge.

Anders Thorup