

Ekstra ugeopgaver

1. *Lad $k = k(\sigma)$ være tallet defineret i GRP(2.18.1), altså som summen $k = \sum (p-1)m_p(\sigma)$. Som nævnt kan σ skrives som produkt af k transpositioner. Vis, at σ ikke kan skrives som produkt af færre end k transpositioner.
2. Lad a, n være to naturlige tal, og lad d være den største fælles divisor for a, n . Der findes da fremstillinger $d = xa - yn$ med hele tal x, y . Vis, at der er et entydigt valg af x, y således, at $1 \leq x \leq n/d$, og at der med dette valg gælder $0 \leq y < a/d$.
3. Bestem cykelfremstillingen af $(1\ 2\ 3 \dots n) \cdots (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)(1\ 2)$.
4. *Bestem cykelfremstillingen af $(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4) \cdots (1\ 2\ 3 \dots n)$.
5. For primtallene 5, 13 og 17 har vi $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, og $17 = 4^2 + 1^2$. Derimod kan 7, 11 og 19 ikke skrives som en sum af to kvadrater. Prøv med nogle flere primtal, og formuler en sætning. *Bevis sætningen.
6. For hvilke $n = 2, 3, \dots, 25$ er gruppen af primiske restklasser $(\mathbb{Z}/n)^*$ cyklisk? Prøv eventuelt med nogle flere værdier af n , og formuler en sætning. *Bevis sætningen.
7. Lad N være en normal undergruppe af gruppen G . To sideklasser, $A_1 = g_1N$ og $A_2 = g_2N$, er specielt delmængder af G . Produktet A_1A_2 har derfor to definitioner, i GRP(4.1) og i GRP(4.15). Giver de to definitioner samme resultat?
8. Findes der 1.000.000 på hinanden følgende ikke-kvadratfrie naturlige tal?
9. Bestem antallet af løsninger modulo n til kongruensen $x^2 \equiv 1$.
10. *Vis, at en ikke-tom mængde G med en associativ komposition '*' er en gruppe, hvis og kun hvis der for alle $a, b \in G$ gælder, at ligningerne $a * x = b$ og $y * a = b$ har løsninger $x, y \in G$.
11. Vis, for $n \geq 3$, at der er uendelig mange primtal p med $p \not\equiv 1 \pmod{n}$.
12. *Dirichlet's sætning udsiger, at når $(a, n) = 1$, så findes der uendelig mange primtal p med $p \equiv a \pmod{n}$. Vis, at der findes uendelig mange primtal p med $p \equiv 1 \pmod{4}$.
13. Er det muligt at dele en terning i 1992 terninger (naturligvis ikke alle af samme størrelse)? [Kilde: Lettisk konkurrence — for 9. klasse! Jeg syntes, den var svær.]
14. For en undergruppe H af en endelig gruppe G virker G ved translation på mængden $X = G/H$ af sideklasser. Bestem isotropigruppen for en given sideklasse xH . Bestem kernen for den tilhørende repræsentation $G \rightarrow \text{Perm}(G/H)$.
15. Antag, at p er den mindste primdivisor i ordenen af G , og at H er en undergruppe af index p . Vis, at H er normal.
16. Kvaternion-enhederne $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tilhører ringen $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$. Vis, at matricerne af formen $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, for reelle tal (a, b, c, d) , udgør en delring \mathbb{H} af $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$. Vis, at \mathbb{H} er et skævlegeme.
17. Vis det omvendte af Wilson's sætning, for $n \geq 2$: Hvis $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, så er n et primtal. Hvad med det omvendte af Fermat's sætning?
18. Lad ξ være et (irrationalt) kvadratisk tal med diskriminant D . Vis, for et ulige primtal p , at p er et primelement i $\mathbb{Z}[\xi]$, hvis og kun hvis D modulo p ikke er et kvadrat.

12. februar 2003

19. *Når n er primopløst, $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$, er det let at bestemme antallet af (positive) divisorer i n : det er produktet $(\nu_1 + 1) \cdots (\nu_r + 1)$. Kan du finde en formel for summen af divisorerne?