Obligatorisk opgave nr. 2

Besvarelsen afleveres til instruktoren, eventuelt i instruktorens box, senest den 11/4 kl 12.00.

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 5 \pmod 8$ og $a \equiv 2 \pmod 9$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/72)^*$, har restklassen af a modulo 72?
2. Betragt, i gruppen S_{2003}, de to cykler, $\gamma_1 := (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10)$ og $\gamma_2 := (1\,3\,5\,7\,9)$. Angiv fremstillingerne af $\gamma_1\gamma_2$ og $\gamma_2\gamma_1$ som produkt af disjunkte cykler.
3. Angiv cykeltype, fortegn og orden for permutationen i gruppen S_{2003}:
$$(1\,3\,5\,\ldots\,2003)(2\,4\,6\,\ldots\,2002).$$
4. Betragt 5-cyklen $\sigma = (2\,3\,4\,5\,6)$ som permutation i S_6. Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst permutationerne i centralisatoren for σ.
5. Gør rede for, at diedergruppen D_{13} naturligt kan opfattes som undergruppe af diedergruppen D_{1001}. Angiv to ikke-isomorfe grupper af orden 2002, som indeholder en undergruppe isomorf med D_{13}.
6. Bestem i diedergruppen D_{1000} antallene af elementer af orden 1, 2, 3, 4, og 5.
7. Vis, at Klein's Vierer-gruppe V er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er lige.
8. Bestem antallet af abelske grupper af orden 2000 (på nær isomorfi).
9. Betragt nedenstående 6 grupper:
$$G_1 := \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_{10} \times \mathrm{C}_{100}, \quad G_2 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{125}, \quad G_3 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_{100},$$
$$G_4 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{10} \times \mathrm{C}_{50}, \quad G_5 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{20} \times \mathrm{C}_{25}, \quad G_6 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{500}\,.$$
Bestem de par (i, j) med $i < j$ for hvilke grupperne G_i og G_j er isomorfe.
10. I en kommutativ gruppe G af orden 120 findes et element af orden 24. Vis, at G er cyklisk.
11. Talrummet $\mathbb{R}^4$ kan opfattes som mængden af afbildninger $\{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$. Følgelig virker S_4 på $\mathbb{R}^4$. Bestem isotropigruppen for vektoren $(1, 1, 0, 0)$. Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.
12. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem?
13. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem?
14. Bestem antallet af grupper af orden 4.012.009. [Vink: ordenen er et kvadrattal.]
15. Lad $\varphi\colon \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/4$ være en surjektiv homomorfi. Vis, at kernen er (isomorf med) $\mathbb{Z}/4$ eller $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Vis at begge muligheder kan forekomme (med passende valg af φ).

Det er en betingelse for at gå til eksamen, at man har fået godkendt begge obligatoriske opgaver af samme instruktor. Studerende, der har fået godkendt de obligatoriske opgaver i 2002, kan få godkendelsen overført ved at henvende sig til undertegnede.

Anders Thorup