Obligatorisk opgave nr. 1

Besvarelsen afleveres til instruktoren, eventuelt i instruktorens box, senest den 14/3 kl 12.00. Det er nok en god ide at læse hele opgaven inden du begynder at besvare den.

Mange varer er mærket med en kode, i USA oprindeligt den såkaldte UPC-kode (Universal Product Code), i Europa den såkaldte EAN-kode (European Article Number). Den består af $1+6+6=13$ cifre, markeret på varen sammen med en stregkode. Et eksempel er koden for $\frac{1}{2}$l Harildskilde vand i plasticflaske:

5 709310 003323

Det sidste ciffer (i eksemplet ovenfor tallet 3) er et checkciffer, idet en *gyldig* varekode $d_1 d_2 \ldots d_{13}$ skal opfylde følgende *checkbetingelse*:

$$d_1 + 3d_2 + d_3 + 3d_4 + \cdots + 3d_{12} + d_{13} \equiv 0 \pmod{10}. \tag{*}$$

Fejlmulighederne i stregkoder ligger hovedsageligt i læsningen (scanningen). Blandt fejlkilder kan nævnes, at stregkoden er (delvis) ødelagt (fx af smuds, ridser) eller at stregkodens elementer ikke overholder de konventioner, som scanneren læser efter (relative stregtykkelser/stregafstande). Supermarkedets scanner omsætter den læste stregkode til et tal, og kan via sin computerforbindelse undersøge, om tallet er behæftet med fejl. Dette sker bl.a. ved at kontrollere, at tallet opfylder checkbetingelsen (*). I øvrigt er normale varekoder opbygget således: de to første cifre angiver oprindelseslandet (Danmarks cifre er altså 57), de næste fem er producentens nummer, de næstfølgende fem er varenummeret; det sidste ciffer er et checkciffer, bestemt ved betingelsen (*). Ved en gyldig varekode vil vi blot forstå en følge af 13 cifre, som opfylder check'et, dvs betingelsen (*).

(1) Afslører check'et cifferfejl? Mere præcist: Er det rigtigt for enhver gyldig varekode, at hvis præcis ét ciffer ændres, så fås en ugyldig kode?

En almindeligt forekommende fejl ved kommunikation af tal, specielt på dansk, er ombytning af nabocifre: „treogfyrre" tastes som 34. Denne type fejl kan fx opstå ved manuel indtastning af varekoder.

(2) Afslører check'et ombytning af nabocifre? Mere præcist: Er det rigtigt for enhver gyldig varekode, at hvis to forskellige nabocifre ombyttes, så fås en ugyldig kode?

Mere generelt kan man naturligvis spørge, om vilkårlig ombytning af to forskellige cifre (ikke nødvendigvis nabocifre) afsløres.

(3) Afslører check'et cifferombytninger? Mere præcist: Er det rigtigt for enhver gyldig varekode, at hvis (præcis) to forskellige cifre ombyttes, så fås en ugyldig kode?

Det er velkendt, at scannere kan læse korrekt under forbavsende vanskelige vilkår, og specielt, at både læsning fra venstre mod højre og læsning fra højre mod venstre foregår problemfrit.

(4) Vis, at det ikke er check'et, der skelner mellem de to læsningsretninger. Mere præcist: Vis, at der findes cifre $d_1, \ldots, d_{13}$ således, at $d_1 d_2 \ldots d_{13}$ og $d_{13} \ldots d_2 d_1$ er forskellige og gyldige varekoder.

Varekoder er et specialtilfælde af følgende: Der er givet et sæt $(w_1, \ldots, w_k)$ af $k \geqslant 3$ hele tal, kaldet *vægte*. Videre er n et fast naturligt tal. For hvert k-sæt $(d_1, \ldots, d_k)$ af „cifre“, dvs hele tal med $0 \leqslant d_i < n$, betragtes følgende checkbetingelse:

$$w_1 d_1 + \cdots + w_k d_k \equiv 0 \pmod{n}. \tag{†}$$

(I varekoderne ovenfor er $k = 13$ og $n = 10$, med vægtene $(1, 3, 1, 3, \ldots, 3, 1)$.)

(5) Vis, at check'et (†) afslører cifferfejl, hvis w_i er primisk med n for $1 \leqslant i \leqslant k$.

(6) Vis, for $i < j$, at check'et (†) afslører ombytning af i'te og j'te ciffer, hvis $w_i - w_j$ er primisk med n.

I den såkaldte ISBN-kode på bøger (International Standard Book Number) er der $k = 10$ cifre. Checkbetingelsen er (†) med $n = 11$ og $(w_1, w_2, \ldots, w_{10}) = (10, 9, \ldots, 1)$. De første 9 cifre i en ISBN-kode er sædvanlige cifre, det sidste „ciffer“ kan eventuelt være tallet 10, markeret med et 'X'.

(7) Gør rede for, at check'et på ISBN-koder afslører cifferfejl og cifferombytninger.

(8) ISBN-koden $d_1 \ldots d_{10}$ omsættes til varekoden $978 d_1 \ldots d_9 d'_{10}$, idet cifrene 978 foranstilles og cifret d_{10} ændres til d'_{10} således, at resultet bliver en gyldig varekode. Hvilken varekode fremkommer af ISBN-koden 87–91180–08–2?

Betragt igen den generelle checkbetingelse (†).

(9) Vis, at der i (5) også gælder „kun hvis“.

(10) Antag i (6), at en vægt w_l, med $l \neq i$ og $l \neq j$, er primisk med n. Vis, at der så gælder „kun hvis“ i (6). (Antagelsen vedrørende vægten w_l kan fx bruges til at indse, at for givne „cifre“ d', d'' findes en gyldig kode $(d_1, \ldots, d_k)$ med $d_i = d'$ og $d_j = d''$.)

(11) Vis, at for $n = 10$ er det ikke muligt at bestemme vægtene således, at check'et afslører både cifferfejl og ombytning af nabocifre.

%%%

Et formål med opgaven er at demonstrere, hvordan simpel algebra har anvendelser i dagligdagen. Men pas på! Spørgsmålene i opgaven er også formuleret i dagligsprog, og inden du besvarer dem, må du „oversætte“ dem til præcise matematiske udsagn, som du så kan bevise (eller modbeviser). Betragt fx det simple spørgsmål (1) ovenfor. Overvej, at den angivne præcisering er en rimelig fortolkning af hvad der menes. Men inden du går i gang med at besvare spørsmålet, skal du sikkert præcisere det yderligere til en matematisk påstand: For enhver varekode $d_1 d_2 \ldots d_{13}$, som opfylder (*), og enhver plads i, dvs $1 \leqslant i \leqslant 13$, gælder, at den kode, der fremkommer ved at ændre cifferet d_i til et ciffer $d'_i \neq d_i$, er en ugyldig kode. I hvert fald skal det fremgå af din besvarelse, at det en sådan påstand, du har i tankerne. Du skal *bevise*, at denne påstand er sand – for lad os bare afsløre det her: påstanden vedrørende spørgsmål (1) *er* sand.
Selv om der allerede er anført tilsvarende præciseringer ved en række af de øvrige spørgsmål, er det nødvendigt, at du selv kommer med yderligere præciseringer inden du kan give korrekte matematisk beviser.

[Vink: Venstresiden i (†) (eller i (*)), beregnet modulo n, kaldes i øvrigt også *checksummen*. Det kan være bekvemt at opfatte checksummen som en funktion $f(d_1, \ldots, d_k)$ og undersøge hvorledes funktionen ændres, når cifrene ændres.]