

# Facitliste til eksamensopgaver

Regnet af Jonas B. Rasmussen

Her er facit til samtlige eksamensopgaver i Matematik 2AL efter overgangen til den nye eksamensform. Jeg kan under ingen omstændigheder garantere rigtigheden af indholdet. Størstedelen af opgaverne blev regnet mens jeg fulgte kurset, og jeg har ikke forsøgt at checke rigtigheden herefter. Jeg vil meget gerne have at vide hvis der er fejl i facitlisten, og disse kan rapporteres til mig via e-mail.

Jonas B. Rasmussen,  
Februar 2003,  
m99jbr@math.ku.dk

## Sommer 1996

1.  $C_{260}$ ,  $C_2 \times C_{130}$  og  $D_{130}$ .
2. Benyt at  $S_4$  ikke indeholder elementer af orden 6 (betragt de mulige cykeltyper).
3.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
4.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
5.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{Z}_5[X]$ .
6.  $\sigma\tau = (1\ 3)(2\ 4\ 5\ 6)$  og  $\tau\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$ , så  $|\sigma\tau| = |\tau\sigma| = 4$ .
7.  $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4) = (1\ 3)(2\ 4)$ .
8. 45.
9. Benyt at elementer af samme cykeltype som  $\tau$  må tilhøre den mindste normale undergruppe, og tag så produkter af passende elementer indtil samtlige cykeltyper i  $A_6$  fremkommer.
10. 144 og  $\mathcal{C}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ .
11. Benyt Sylows sætninger ( $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$ ).
12.  $50 = -i(1+i)^2(2+i)^2(2-i)^2$ .
13. 198.
14.  $x + 1$ .
15. Benyt at  $f(x)$  ikke har rødder i  $\mathbb{Z}_2$ .

## Vinter 1996–97

1.  $C_{140}$ ,  $C_2 \times C_{70}$ ,  $D_{70}$  og  $C_{10} \times D_7$ .
2.  $\langle D \rangle$  og  $\langle D^2, S \rangle$ .
3.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
4.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
5.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Z}_5[X]$ .
6.  $\sigma\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7)$  og  $\tau\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 6)(5\ 7)$ , så  $|\sigma\tau| = |\tau\sigma| = 10$ .
7. Benyt at  $\mu$  er et produkt af disjunkte transpositioner.
8. 105.
9. 8, 9, 11, 13, 14 og 15.

4. juni 2003

10. 840 og  $\mathcal{C}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ .
11. Benyt Sylows sætninger ( $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ ).
12.  $1+i$ ,  $1+2i$  og  $1+4i$  er irreducibel, og  $1+3i = (1+i)(2+i)$  og  $1+5i = (1+i)(3+2i)$ .
13. 92.
14.  $g(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Z}_2[X]$  da det ikke har rødder i  $\mathbb{Z}_2$ , og at det er det eneste ses ved eftersyn.
15.  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ,  $x^4 + x^3 + 1$  og  $x^4 + x + 1$ .

**Sommer 1997**

1.  $\sigma = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$  og  $\text{sign}(\sigma) = 1$ .
2.  $2^3 4^1$ .
3. Vis konkret at den eneste kommutative gruppe der opfylder kravet er den cykliske.
4. Vis og benyt at  $|(g_1, g_2)| \mid n$  hvis og kun hvis  $|g_1|, |g_2| \mid n$ .
5. 1 i  $C_{60}$ , 15 i  $A_5$ , 3 i  $A_4$ , 31 i  $D_{30}$  og 23 i  $D_3 \times D_5$ .
6. Benyt at en cyklisk undergruppe af orden 4 kun kan indeholde drejninger.
7. For  $f \in X$  er  $(S_4)_f \simeq S_k \times S_{4-k}$  hvor  $k$  er antallet af elementer  $f$  sender i 0.
8. 5.398.083.
9. Benyt Sylows sætninger.
10. Benyt Sylows sætninger ( $880 = 2^4 \cdot 5 \cdot 11$ ).
11. 6.
12.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
13.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
14.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{F}_2[X]$ .
15.  $11 + 2i = (1 + 2i)(2 - i)^2$ .

**Vinter 1997–98**

1.  $a = 29$  og  $|[a]_{72}| = 6$ .
2.  $\text{sign}(\sigma) = 1$  og  $3^3$ .
3.  $\text{id}$ ,  $(1\ 2)(3\ 4)$ ,  $(1\ 2\ 3)$ ,  $(1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6)$ ,  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7)$  og  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ .
4. 1120.
5. Benyt at nogle af grupperne er kommutative, og betragt elementordener for at vise resten.
6. Benyt at en undergruppe isomorf med Kleins Vierer-gruppe må indeholde drejninger.
7. Vis konkret at den eneste kommutative gruppe der opfylder kravet er den cykliske.
8.  $(S_4)_{(1,1,0,0)} \simeq S_2 \times S_2$  og  $(0, 0, 1, 2)$ .
9. Benyt Sylows sætninger.
10. 105.918.450.471.
11.  $x^{12} - 10$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
12. 1 eller  $(X^2 + X + 1)^2$ .
13. 10.
14.  $2 + \sqrt{-7} \mid 1 + 6\sqrt{-7}$  og  $2 + \sqrt{-7}$  har kun de trivielle divisorer  $\pm 1$  og  $\pm(2 + \sqrt{-7})$ .
15. 2 og 6.

4. juni 2003

**Sommer 1998**

1.  $a = 77$  og  $|[a]_{180}| = 12$ .
2. Benyt afbildningen på elementet  $xy$ .
3. Hvis  $\sigma$  betegner permutationen, så er  $\sigma = (0\ 5)(1\ 8\ 9\ 2)(3\ 4\ 7\ 6)$ ,  $|\sigma| = 4$  og  $\text{sign}(\sigma) = -1$ .
4. 240.
5. 12.
6. Benyt Sylows sætninger.
7. Benyt Sylows sætninger.
8. Vis konkret at de kommutative grupper ikke indeholder 8 elementer af orden 24.
9. 30.
10. 36.
11. Betragt primringen for  $L$ .
12.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
13.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
14.  $f(x)$  har ikke en rod i  $\mathbb{F}_{17}$ .
15. 216.

**Vinter 1998–99**

1.  $a = 31$  og  $|[a]_{100}| = 10$ .
2. Benyt at elementer af orden større end 2 optræder i par.
3. Hvis  $\sigma$  betegner permutationen, så er  $\sigma = (0\ 2\ 6\ 4)(1\ 9\ 5\ 7)$ ,  $|\sigma| = 4$  og  $\text{sign}(\sigma) = 1$ .
4. 315.
5. 68.
6. Benyt Sylows sætninger.
7. Benyt Sylows sætninger.
8. 360.
9. 108.
10. Betragt primringen for  $L$ .
11.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
12.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
13.  $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$ .
14.  $N(16 + 15i) = 481 = 13 \cdot 37$  og  $16 + 15i = (3 + 2i)(6 + i)$ .
15. 192.

**Sommer 1999**

1.  $|[2]_{385}| = 60$ .
2.  $\sigma^{1999} = (1\ 4\ 3\ 2)(5\ 7\ 6)$ .
3. Hvis  $\sigma$  betegner permutationen, så er  $\sigma = (0\ 3)(1\ 4\ 7\ 6\ 9\ 2)(5\ 8)$ ,  $|\sigma| = 6$  og  $\text{sign}(\sigma) = -1$ .

4. juni 2003

4. Der findes elementer af orden 15 i  $S_8$ , men ikke i  $S_7$  (og enhver gruppe af orden 15 er cyklisk).
5. 105 i  $S_7$  og ingen i  $A_8$ .
6. Benyt at en undergruppe af ulige orden ikke kan indeholde spejlinger.
7. Benyt at et element af orden 2 er sin egen invers.
8. 2.
9. Bestem en konkret Sylow-3-undergruppe.
10. 120.
11. Dette ses ved indsættelse.
12.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
13.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
14.  $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$ .
15.  $N(12 + 5\sqrt{-7}) = 319 = 11 \cdot 29$  og  $12 + 5\sqrt{-7} = (2 - \sqrt{-7})(-1 + 2\sqrt{-7})$ .

**Vinter 1999-00**

1.  $[2]_{1999}^{-1} = [1000]_{1999}$ .
2.  $|[2]_{495}| = 60$ .
3. Vis at  $x \mapsto x^3$  er en permutation af  $\mathbb{Z}/10$ .
4.  $|\sigma^{2000}| = 3$ ,  $1^4 3^1$  og  $\text{sign}(\sigma^{2000}) = -1$ .
5. 143.
6. Benyt at en undergruppes orden er divisor i gruppens orden.
7. 1999.
8.  $1000\mathbb{N}$ .
9. Benyt Noethers 1. Isomorfiætning.
10. Vis konkret at den eneste kommutative gruppe der opfylder kravene er den cykliske.
11. 30.
12.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
13.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
14. Benyt vinket.
15. (1872, 704).

**Sommer 2000**

1.  $|[2]_{693}| = 30$ .
2.  $\sigma\tau = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9)$ ,  $\tau\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 6)(5\ 7\ 8\ 9)$ ,  $\tau\sigma\tau^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 7)$ ,  
 $|\sigma\tau| = |\tau\sigma| = 20$ ,  $|\tau\sigma\tau^{-1}| = 6$  og  $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\tau\sigma) = \text{sign}(\tau\sigma\tau^{-1}) = -1$ .
3. Betragt de mulige cykeltyper.
4. Benyt at nogle af grupperne er kommutative, og betragt elementordener for at vise resten.
5. Vis og benyt vinket ved at vise at  $n \mid \varphi(1)$  for alle naturlige tal  $n$ .
6. Sylow-2-undergrupper har orden 64, Sylow-3-undergrupper har orden 81, Sylow-5-undergrupper har orden 5 og Sylow-7-undergrupper har orden 7.
7. Benyt Sylows sætninger.

4. juni 2003

8.  $C_3 \times C_3 \times C_7 \times C_7 \times C_{11}$ ,  $C_3 \times C_3 \times C_{11} \times C_{49}$ ,  $C_7 \times C_7 \times C_9 \times C_{11}$  og  $C_9 \times C_{11} \times C_{49}$ .
9. 192.700.
10. Benyt RNG (6.14).
11. Benyt RNG (6.14).
12.  $380 = -19(1+i)^4(2+i)(2-i)$ .
13.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
14.  $f(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
15.  $f(x)$  er reducibel i  $\mathbb{F}_3[X]$ .

**Vinter 2000-01**

1. Benyt at  $(\mathbb{Z}/189)^* \simeq (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/27)^*$ .
2.  $\rho\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $\sigma\tau = (3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ ,  $\tau\rho = (1\ 2\ 3)(5\ 6\ 7)$ ,  $|\rho\sigma| = |\sigma\tau| = 5$ ,  $|\tau\rho| = 3$  og  $\text{sign}(\rho\sigma) = \text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\tau\rho) = 1$ .
3.  $\sigma^{665} = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$ .
4.  $1^6 2^3$ .
5. Vis at  $D_6$  og  $A_4$  ikke er isomorfe ved at betragte elementordener.
6. Benyt at en frembringer for  $C_6$  afbildes på enten 1 eller  $-1$ .
7. Sylow-2-undergrupper har orden 8 og Sylow-3-undergrupper har orden 3.
8. Bestem ordenerne af Sylow- $p$ -undergrupperne i  $S_p$  og  $S_{2p-1}$ .
9. Vis konkret at den eneste kommutative gruppe der opfylder kravet er den cykliske.
10. 252.375.
11. 3, 7, 11 og  $8 + 3i$  er primelementer, og  $2 = -i(1+i)^2$ ,  $5 = (2+i)(2-i)$  og  $13 = (2+3i)(2-3i)$ .
12.  $31 = (7+3\sqrt{2})(7-3\sqrt{2})$ .
13.  $x^6 - 26$  er irreducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
14. Vis at  $f(x)$  ikke har rødder i  $\mathbb{F}_3$ .
15.  $g(x) = f(x)(x^3 + x^2 + 2x + 1)$ .

**Sommer 2001**

1. Benyt at  $(\mathbb{Z}/44)^* \simeq (\mathbb{Z}/4)^* \times (\mathbb{Z}/11)^*$ .
2.  $\sigma = (1\ 2\ 4\ 5\ 3)$ ,  $|\sigma| = 5$ , og  $\text{sign}(\sigma) = 1$ .
3.  $5^1$  og  $\text{sign}(\tau) = 1$ .
4. 2 i  $C_{60}$ , 8 i  $A_4 \times C_5$ , 2 i  $D_{30}$  og 2 i  $D_3 \times D_5$ .
5. Benyt at  $\mathbb{Q}$  ikke er cyklisk.
6.  $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_7$ ,  $C_2 \times C_4 \times C_7$  og  $C_7 \times C_8$ .
7. Benyt Sylows sætninger.
8. Sylow-2-undergrupper har orden 16, Sylow-3-undergrupper har orden 9 og Sylow-5-undergrupper har orden 5.
9. 352.
10.  $4 + 3\tau$ ,  $5 + 4\tau$  og  $6 + 5\tau$ .
11. Benyt RNG (6.14).

4. juni 2003

12.  $4 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ .
13.  $x^2 + 1$  er reducibel i  $\mathbb{C}[X]$  og irreducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
14. Vis at  $g(x)$  ikke har rødder i  $\mathbb{Q}$ .
15. Vis at både  $f(x)$  og  $g(x)$  har rødder i  $\mathbb{F}_3$ .

**Vinter 2001-02**

1.  $|[11]_{630}| = 6$ .
2.  $\sigma_2\sigma_3 = (2\ 3)$ ,  $\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = (1\ 3\ 4)$ ,  $|\sigma_2\sigma_3| = 2$ ,  $|\sigma_2\sigma_3\sigma_4| = 3$ ,  $\text{sign}(\sigma_2\sigma_3) = -1$  og  $\text{sign}(\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = 1$ .
3. 1, 2, 3, 4, 5 og 6.
4.  $1^{10}$ ,  $1^{82^1}$ ,  $1^{62^2}$ ,  $1^{64^1}$ ,  $1^{42^3}$ ,  $1^{42^3}$ ,  $1^{42^14^1}$ ,  $1^{22^4}$ ,  $1^{22^24^1}$ ,  $1^{24^2}$ ,  $2^5$ ,  $2^{34^1}$  og  $2^{14^2}$ .
5. Vis og benyt at  $S_3 \simeq D_3$  og  $C_5 \times C_6 \simeq C_3 \times C_{10}$ .
6. Vis at  $D_{12}$  og  $S_4$  ikke er isomorfe ved at betragte elementordener.
7. De ulige primtal.
8. Vis konkret at den eneste abelske gruppe der opfylder kravet er den cykliske.
9. 25.395.
10. Benyt RNG (6.14).
11.  $73 = (1 + 3\sqrt{-8})(1 - 3\sqrt{-8})$ .
12. 3 og 7.
13. Undersøg om polynomierne har rødder i  $\mathbb{F}_5$ .
14.  $g(x)$  er irreducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
15.  $g(x)$  er reducibel i  $\mathbb{F}_2[X]$ .

**Sommer 2002**

1.  $|[31]_{210}| = 6$ .
2.  $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9)$ ,  $|\sigma| = 12$  og  $\text{sign}(\sigma) = 1$ .
3.  $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9)$  og  $\tau = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$ .
4. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 og 84.
5. Betragt elementordener.
6. Vis konkret at den eneste abelske gruppe der opfylder kravet er den cykliske.
7. Benyt vinket.
8. Benyt Sylows sætninger.
9.  $x^{2002} + 2002$  er irreducibel i  $\mathbb{Z}[X]$ .
10.  $x^{2002} + 2002$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
11.  $x^{1936} - 1936$  er reducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
12.  $D(\xi) = -8$  og  $N(x + y\xi) = x^2 + 2y^2$ .
13.  $13 + 10\xi = (1 - 2\xi)(-3 + 4\xi)$ .
14.  $1 + \xi$  og  $1 + 3\xi$ .
15.  $N(21 + 6\xi) = 513$  og  $21 + 6\xi = (1 + \xi)(1 - \xi)^2(1 + 3\xi)$ .

**Vinter 2002-03**

1.  $|[4]_7| = 3$ ,  $|[4]_{11}| = 5$ ,  $|[4]_{13}| = 4$  og  $|[4]_{1001}| = 60$ .
2.  $\sigma = (1\ 2\ 4\ 5\ 3)$ ,  $|\sigma| = 5$  og  $\text{sign}(\sigma) = 1$ .
3. Med  $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$  og  $\tau = (2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$  er  $|\sigma\tau| = 12$ , men  $|\sigma\tau| = 30$  kan ikke forekomme.
4. Betragt  $\varphi([n]) = [n/123]$ .
5. Benyt at  $\mathbb{Q}$  ikke er cyklisk.
6.  $g^* = (\text{id}, D^3)$ .
7. Benyt vinket.
8. Benyt Sylows sætninger.
9.  $x^{2002} - 2025$  er reducibel i  $\mathbb{Q}[X]$ .
10.  $x^{2002} - 2003$  er reducibel i  $\mathbb{R}[X]$ .
11.  $x^{2002} - 2003$  er irreducibel i  $\mathbb{Z}[X]$ .
12.  $D(\xi) = -3$  og  $N(x + y\xi) = x^2 - xy + y^2$ .
13.  $\xi$  og  $1 + \xi$ .
14.  $1 - \xi$  og  $1 + 3\xi$ .
15.  $N(4 + 5\xi) = 21$  og  $4 + 5\xi = (1 - \xi)(1 + 3\xi)$ .