

### Matematik 2AL, sommeren 1996

1. Angiv 3 ikke-isomorfe grupper af orden 260.
2. Gør rede for, at diedergruppen  $D_6$  ikke er isomorf med en undergruppe af den symmetriske gruppe  $S_4$ .

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 24$ .

3. Afgør, om  $f(x)$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[x]$ .
4. Afgør, om  $f(x)$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Q}[x]$ .
5. Afgør, om  $f(x)$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Z}_5[x]$ , hvor  $\mathbb{Z}_5$  er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i  $f(x)$  fortolkes som restklasser i  $\mathbb{Z}_5$ .

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe  $S_6$ . En permutation kaldes en *dobbeltransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med  $\sigma$  og  $\tau$  betegnes følgende to cykler i  $S_6$ :

$$\sigma = (2\ 3\ 4\ 5\ 6) \quad \text{og} \quad \tau = (1\ 2\ 3).$$

6. Udregn produkterne  $\sigma\tau$  og  $\tau\sigma$ , og angiv ordenerne af disse to permutationer.
7. Vis ved et eksempel, at et produkt af to 3-cykler kan være en dobbeltransposition.
8. Bestem antallet af dobbeltranspositioner i  $S_6$ .
9. Gør rede for, at den mindste normale undergruppe af  $S_6$  som indeholder  $\tau$  er den alternerende gruppe  $A_6$ .
10. Bestem antallet af permutationer i  $S_6$  som er konjugerede med  $\sigma$ . Angiv dernæst samtlige permutationer  $\mu$  i centralisatoren for  $\sigma$ , dvs de permutationer  $\mu$  i  $S_6$ , for hvilke  $\mu\sigma = \sigma\mu$ .
11. Vis, at en gruppe af orden 260 ikke kan være simpel.
12. Skriv tallet 50 som et produkt af irreducible elementer i Gauss' talring  $\mathbb{Z}[i]$ .
13. Hvor mange forskellige perlekæder med 7 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?

I de sidste 2 spørgsmål betragtes polynomierne  $f(x) = x^5 + x^3 + 1$  og  $g(x) = x^2 + x + 1$  i ringen  $\mathbb{Z}_2[x]$ .

14. Bestem resten af  $f(x)$  ved division med  $g(x)$ , dvs angiv det polynomium  $r(x)$  af grad mindre end 2, som indgår i en fremstilling  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$  i  $\mathbb{Z}_2[x]$ .
15. Polynomiet  $g(x)$  er det eneste irreducible andengradspolynomium i  $\mathbb{Z}_2[x]$  [Dette kræves ikke bevist]. Vis, at polynomiet  $f(x)$  er irreducibelt i  $\mathbb{Z}_2[x]$ .

**Matematik 2AL, vinteren 1996-97**

1. Angiv 4 ikke-isomorfe grupper af orden 140.
2. Vis, at diedergruppen  $D_4$  indeholder to ikke-isomorfe undergrupper af orden 4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet  $f(x) = x^3 + 12x^2 + 18$ .

3. Afgør, om  $f(x)$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[x]$ .
4. Afgør, om  $f(x)$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Q}[x]$ .
5. Afgør, om  $f(x)$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Z}_5[x]$ , hvor  $\mathbb{Z}_5$  er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i  $f(x)$  fortolkes som restklasser i  $\mathbb{Z}_5$ .

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe  $S_7$ . En permutation kaldes en *dobbeltransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med  $\sigma$  og  $\tau$  betegnes følgende to cykler i  $S_7$ :

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \quad \text{og} \quad \tau = (5\ 6\ 7).$$

6. Udregn produkterne  $\sigma\tau$  og  $\tau\sigma$ , og angiv ordenerne af disse to permutationer.
7. Vis, at enhver permutation  $\mu \neq \text{id}$  i  $A_7$ , som opfylder  $\mu^2 = \text{id}$ , er en dobbeltransposition.
8. Bestem antallet af dobbeltranspositioner i  $S_7$ .
9. Hvilke af tallene  $1, 2, \dots, 15$  er ikke orden af et element i  $S_7$ ?
10. Bestem antallet af permutationer i  $S_7$  som er konjugerede med  $\sigma$ . Angiv dernæst samtlige permutationer  $\mu$  i centralisatoren for  $\sigma$ , dvs de permutationer  $\mu$  i  $S_7$ , for hvilke  $\mu\sigma = \sigma\mu$ .
11. Vis, at en gruppe af orden 140 ikke kan være simpel.
12. Hvilke af tallene  $1 + i, 1 + 2i, 1 + 3i, 1 + 4i$ , og  $1 + 5i$  er irreducible i Gauss' talring  $\mathbb{Z}[i]$ . Angiv primopløsninger i  $\mathbb{Z}[i]$  for de reducible af tallene.
13. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?
14. Betragt polynomiet  $g(x) = x^2 + x + 1$  i ringen  $\mathbb{Z}_2[x]$ . Vis, at  $g(x)$  er et irreducibelt polynomium, og vis, at  $g(x)$  er det eneste irreducible polynomium af grad 2.
15. Angiv samtlige irreducible polynomier af grad 4 i  $\mathbb{Z}_2[x]$ .

**Matematik 2AL, sommeren 1997**

1. Permutationen  $\sigma$  i  $S_6$  er et produkt af fire 3-cykler,

$$\sigma = (4\ 5\ 6)(3\ 4\ 5)(2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3).$$

Bestem fortegnet for  $\sigma$ . Angiv fremstillingen af  $\sigma$  som produkt af disjunkte cykler.

2. En permutation  $\mu$  i  $S_{10}$  har typen  $4^1 6^1$ . Hvilken type har  $\mu^3$ ?
3. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har præcis ét element af orden 2, så er gruppen cyklisk.
4. For en endelig gruppe  $G$  og  $n \in \mathbb{N}$  betegnes med  $\alpha_n(G)$  antallet af elementer i  $G$ , hvis orden er divisor i  $n$ . Vis, at hvis  $G$  er et direkte produkt,  $G = G_1 \times G_2$ , så er  $\alpha_n(G) = \alpha_n(G_1)\alpha_n(G_2)$ .
5. Angiv antallet af elementer af orden 2 i hver af følgende grupper:  $C_{60}$ ,  $A_5$ ,  $A_4 \times C_5$ ,  $D_{30}$ ,  $D_3 \times D_5$ .
6. Vis, at den cykliske gruppe  $C_4$  er isomorf med en undergruppe af diedergruppen  $D_n$ , hvis og kun hvis  $n$  er delelig med 4.
7. Produktmængden  $X := \{0, 1\}^4$  af 4-sæt  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  med  $x_i \in \{0, 1\}$  kan opfattes som mængden af afbildninger  $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1\}$ . Følgelig virker  $S_4$  på  $X$ . Beskriv isotropigrupperne for denne virkning.
8. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte  $4 \times 4 = 16$  små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
9. Lad  $S_1$  og  $S_2$  være grupper af orden  $2^v$  og lad  $H_1$  og  $H_2$  være grupper af ulige orden. Vis, at hvis  $S_1 \times H_1$  og  $S_2 \times H_2$  er isomorfe, så er  $S_1$  og  $S_2$  isomorfe.
10. Vis, at en gruppe af orden 880 ikke kan være simpel.
11. Bestem, i polynomiumsringen  $\mathbb{F}_3[X]$ , antallet af irreducible polynomier af grad 2.
- I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet  $f = X^5 + 21X + 63$ .
12. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[X]$ .
13. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Q}[X]$ .
14. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{F}_2[X]$ , hvor  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$  og koefficienterne i  $f$  fortolkes som restklasser modulo 2.
15. Angiv, i Gauss' talring  $\mathbb{Z}[i]$ , primopløsningen af tallet  $11 + 2i$ .

**Matematik 2AL, vinteren 1997–98**

1. Bestem et helt tal  $a$  således, at  $a \equiv 5 \pmod{8}$  og  $a \equiv 2 \pmod{9}$ . Hvilken orden, i gruppen  $(\mathbb{Z}/72)^*$ , har restklassen af  $a$  modulo 72?
2. I den symmetriske gruppe  $S_9$  betragtes permutationen,

$$\sigma = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5)(5\ 6\ 7\ 8\ 9))^3.$$

Bestem fortegnet for  $\sigma$ . Angiv typen af  $\sigma$ .

3. Angiv i gruppen  $A_7$  et element af hver af de forekommende ordener.
4. Hvor mange permutationer i  $S_8$  har typen  $2^1 3^2$ ?
5. Vis, at følgende grupper parvis er ikke-isomorfe:  $C_{12}$ ,  $C_6 \times C_2$ ,  $A_4$ ,  $D_3 \times C_2$ .
6. Vis, at Klein's Vier-gruppe  $V$  er isomorf med en undergruppe af diedergruppen  $D_n$ , hvis og kun hvis  $n$  er lige.
7. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har et element af orden 24, så er gruppen cyklisk.
8. Talrummet  $\mathbb{R}^4$  kan opfattes som mængden af afbildninger  $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Følgelig virker  $S_4$  på  $\mathbb{R}^4$ . Bestem isotropigruppen for vektoren  $(1, 1, 0, 0)$ . Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.
9. Vis, at en gruppe af orden  $5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$  ikke kan være simpel.
10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte  $5 \times 5 = 25$  små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
11. Vis, at netop ét af polynomierne  $X^{12} - 8$ ,  $X^{12} - 9$  og  $X^{12} - 10$  er irreducibelt i  $\mathbb{Q}[X]$ .
12. Angiv i  $\mathbb{F}_2[X]$  et polynomium, som er reducibelt og uden rødder i  $\mathbb{F}_2$ .
13. Bestem i polynomiumsringen  $\mathbb{F}_5[X]$  antallet af normerede irreducible polynomier af grad 2.
14. Afgør, i den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ , hvilke af tallene  $1 \pm 6\sqrt{-7}$ , der har  $2 + \sqrt{-7}$  som divisor. Hvilke divisorer har  $2 + \sqrt{-7}$ ?
15. For hvilke tal  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  har ligningen  $x^2 + y^2 = n!$  heltalsløsninger  $(x, y)$ ?

**Matematik 2AL, sommeren 1998**

1. Bestem et helt tal  $a$  således, at  $a \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $a \equiv 2 \pmod{5}$  og  $a \equiv 5 \pmod{9}$ . Hvilken orden, i gruppen  $(\mathbb{Z}/180)^*$ , har restklassen af  $a$  modulo 180.
  2. Om en gruppe  $G$  vides, at afbildningen  $x \mapsto x^2$  er en homomorfi  $G \rightarrow G$ . Vis, at  $G$  er abelsk.
  3. Vis, at der ved  $x \mapsto 3x + 5$  defineres en permutation af mængden  $\mathbb{Z}/10$ . Angiv, idet tallene  $0, 1, \dots, 9$  identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.
  4. Bestem for den symmetriske gruppe  $S_6$  antallet af elementer af orden 6.
  5. Bestem det mindste naturlige tal  $n$  for hvilket  $A_n$  indeholder et element af orden 30.
  6. Lad  $G$  være en gruppe af orden 60, og lad  $a(G)$  betegne antallet af elementer i  $G$  af orden 5. Vis, at  $a(G)$  er 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.
  7. Gør rede for, at en gruppe af orden  $992 = 31 \cdot 32$  ikke kan være simpel.
  8. En gruppe af orden 120 indeholder 8 elementer af orden 6. Vis, at gruppen ikke er kommutativ.
  9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem.
  10. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.
  11. Lad  $L$  være et legeme med  $2^v$  elementer. Vis, at  $L$  har karakteristisk 2, og beskriv strukturen af  $L$ 's additive gruppe.
- I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet  $f = X^{16} + 12$ .
12. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[X]$ .
  13. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Q}[X]$ .
  14. Afgør, idet koefficienterne i  $f$  identificeres med deres restklasser modulo 17, om  $f$  har en rod i  $\mathbb{F}_{17}$ .
  15. Hvor mange elementer i Gauss's talring  $\mathbb{Z}[i]$  er divisorer i 150.

**Matematik 2AL, vinteren 1998–99**

1. Bestem et helt tal  $a$  således, at  $a \equiv 3 \pmod{4}$  og  $a \equiv 6 \pmod{25}$ . Hvilken orden, i gruppen  $(\mathbb{Z}/100)^*$ , har restklassen af  $a$  modulo 100.
  2. Lad  $G$  være en endelig kommutativ gruppe. Vis, at afbildningen  $x \mapsto x^2$ , af  $G$  ind i  $G$ , er bijektiv, hvis og kun hvis  $G$  er af ulige orden.
  3. Vis, at der ved  $x \mapsto 7x + 2$  defineres en permutation af mængden  $\mathbb{Z}/10$ . Angiv, idet tallene  $0, 1, \dots, 9$  identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.
  4. Bestem for den symmetriske gruppe  $A_8$  antallet af elementer af orden 2.
  5. Bestem det mindste naturlige tal  $n$  for hvilket  $A_n$  indeholder et element af orden 1998. [Vink:  $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ .]
  6. Lad  $G$  være en gruppe af orden 120. Vis, at antallet af elementer i  $G$  af orden 5 er enten 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.
  7. Antag, at tallet  $2^v - 1$  er et primtal. Gør rede for, at en gruppe af orden  $2^v(2^v - 1)$  ikke kan være simpel.
  8. Bestem en værdi af  $n$  således, at der er præcis 6 kommutative grupper af orden  $n$ .
  9. Hvor mange karusseller med 10 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.
  10. Lad  $L$  være et legeme med 27 elementer. Vis, at  $L$  har karakteristik 3 og at  $L$ 's additive gruppe er isomorf med  $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$ .
- I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet  $f = X^4 + 100X^3 + 100X + 50$ .
11. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[X]$ .
  12. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Q}[X]$ .
  13. Vis, idet koefficienterne i  $f$  identificeres med deres restklasser modulo 3, at i  $\mathbb{F}_3[X]$  er  $X^2 + 1$  divisor i  $f$ .
  14. Vis, at tallet  $16 + 15i$  har en norm, der er delelig med 13. Angiv, i Gauss's talring  $\mathbb{Z}[i]$ , en primopløsning af  $16 + 15i$ .
  15. Hvor mange elementer i Gauss's talring  $\mathbb{Z}[i]$  er divisorer i 1998.

**Matematik 2AL, sommeren 1999**

1. Bestem i gruppen  $(\mathbb{Z}/385)^*$  ordenen af restklassen af 2.
  2. Bestem potensen  $\sigma^{1999}$  af permutationen  $\sigma = (1\ 2)(7\ 6)(2\ 3)(5\ 6)(3\ 4)$  i  $S_7$ .
  3. Vis, at der ved  $x \mapsto x^3 + 3$  defineres en permutation af mængden  $\mathbb{Z}/10$ . Angiv, idet tallene  $0, 1, \dots, 9$  identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens type, orden og fortegn.
  4. Vis, at der findes en undergruppe af orden 15 i  $S_8$ . Findes der en undergruppe af orden 15 i  $S_7$ ?
  5. Bestem antallet af permutationer af type  $2^3$  i  $S_7$  og i  $A_8$ .
  6. Lad  $d$  være en ulige divisor i  $n$ . Vis, at diedergruppen  $D_n$  har præcis én undergruppe af orden  $d$ .
  7. Betragt i en gruppe  $G$  to forskellige elementer  $a$  og  $b$  af orden 2. Vis, at  $ab$  har orden 2, hvis og kun hvis  $a$  og  $b$  kommuterer.
  8. Lad  $p$  være et primtal. Bestem antallet af ikke-trivielle undergrupper af gruppen  $C_p \times C_p$ .
  9. Vis, at Sylow-3-undergrupperne i  $S_6$  er isomorfe med  $C_3 \times C_3$ .
  10. Overfladen på badebolde, af perfekt kugleform, er delt i 10 lige store områder via en ækvator og 5 længdekredse (som på en globus), der deler ækvator i 5 lige store dele. Hvert område kan være farvet rødt eller hvidt. Hvor mange badebolde findes der?
- I de næste fire opgaver betragtes polynomiet  $f = X^4 + 1$ .
11. Vis, at enhedsroden  $\zeta = e^{2\pi i/8} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$  er rod i  $f$ .
  12. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[X]$ .
  13. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Q}[X]$ .
  14. Bestem, idet koefficienterne i  $f$  identificeres med deres restklasser modulo 5, primopløsningen af  $f$  i  $\mathbb{F}_5[X]$ .
  15. Vis, at normen af tallet  $12 + 5\sqrt{-7}$  er delelig med 11. Bestem i talringen  $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$  en irreducibel opløsning af  $12 + 5\sqrt{-7}$ .

**Matematik 2AL, vinteren 1999–2000**

**NB.** Det kræves ikke godtgjort i besvarelsen, at 1999 er et primtal.

1. Vis, at restklassen af 2 modulo 1999 er invertibel, og angiv den inverse restklasse.
  2. Bestem i gruppen  $(\mathbb{Z}/495)^*$  ordenen af restklassen af 2.
  3. Vis, at for hvert helt tal  $a$  har kongruensen  $x^3 \equiv a \pmod{10}$  en, og modulo 10 kun én, løsning  $x$ .
  4. Angiv, idet  $\sigma = (1\ 2)(7\ 6)(2\ 3)(5\ 6)(3\ 4)$  i  $S_7$ , orden, cykeltype og fortegn for permutationen  $\sigma^{2000}$ .
  5. Bestem det mindste naturlige tal  $n$  for hvilket den alternerende gruppe  $A_n$  indeholder et element af orden 2000.
  6. Vis, at hvis den symmetriske gruppe  $S_n$  indeholder en undergruppe af orden 2000, så er  $n \geq 15$ . Vis, at  $S_{23}$  indeholder en kommutativ undergruppe af orden 2000.
  7. Hvilken orden har Sylow-1999-undergruppen i  $S_{2000}$ .
  8. For hvilke værdier af  $n$  indeholder diedergruppen  $D_n$  en undergruppe af orden 2000.
  9. Lad  $H$  være en undergruppe af den symmetriske gruppe  $S_n$ . Vis, at enten er  $H \subseteq A_n$  eller også indeholder  $H$  det samme antal lige og ulige permutationer.
  10. En kommutativ gruppe  $G$  af orden 2000 har præcis et element af orden 2 og præcis 4 elementer af orden 5. Vis, at  $G$  må være cyklisk.
  11. Hvor mange forskellige perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem.
- I de næste tre opgaver betragtes polynomiet  $f = X^{2000} - 1000X^2 - 50$ .
12. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[X]$ .
  13. Afgør, om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Q}[X]$ .
  14. Vis, idet koefficienterne i  $f$  identificeres med deres restklasser modulo 1999, at  $f$  har præcis 2 rødder i  $\mathbb{F}_{1999}$ . [Vink: brug for eksempel Fermat's lille sætning til at vise, for  $x \in \mathbb{Z}$ , at  $2f(x) \equiv x^2 - 100 \pmod{1999}$ .]
  15. Bestem for  $k = 2000$  en løsning  $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  til ligningen  $x^2 + y^2 = k^2$  således, at 5 ikke går op i  $x$ .

**Matematik 2AL, sommeren 2000**

1. Bestem i gruppen  $(\mathbb{Z}/693)^*$  ordenen af restklassen af 2. (Vink:  $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ .)
  2. Betragt cyklerne  $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$  og  $\tau = (5\ 6\ 7\ 8\ 9)$  i  $S_9$ . Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af  $\sigma\tau$ ,  $\tau\sigma$  og  $\tau\sigma\tau^{-1}$ .
  3. Vis at den symmetriske gruppe  $S_9$  indeholder elementer af orden 14 og 20, men ingen elementer af orden 21.
  4. Vis at følgende grupper er parvis ikke-isomorfe:  $S_4$ ,  $C_{24}$ ,  $C_4 \times C_6$ ,  $A_4 \times C_2$ .
  5. Vis at hvis  $\varphi$  er en gruppehomomorfi fra  $(\mathbb{Q}, +)$  til  $(\mathbb{Z}, +)$ , så er  $\varphi$  triviel, dvs.  $\varphi(q) = 0$  for alle  $q \in \mathbb{Q}$ . (Vink: Start med at vise  $\varphi(1) = 0$ .)
  6. For hvilke primtal  $p$  findes en ikke-triviel Sylow- $p$ -undergruppe i den alternerende gruppe  $A_9$ , og hvilke ordener har de ikke-trivielle Sylow- $p$ -undergrupper?
  7. Vis at en gruppe af orden 135 ikke kan være simpel.
  8. Angiv de kommutative grupper af orden  $4851 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ .
  9. Hvor mange perlekæder med 11 perler kan der laves, når der er 4 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
  10. Vis at primtallet 5 er irreducibelt som element i den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ . Er 5 et primelement i  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ ? Er  $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$  UFD?
  11. Vis at  $77 + 55\sqrt{2}$  er et primelement i ringen  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .
  12. Angiv i Gauss' talring  $\mathbb{Z}[i]$  primopløsningen af tallet 380.
- I de sidste tre spørgsmål betragtes polynomiet  $f = X^5 + 38X^2 - 19$ .
13. Afgør om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[X]$ .
  14. Afgør om  $f$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{Q}[X]$ .
  15. Afgør, idet koefficienterne i  $f$  identificeres med deres restklasser modulo 3, om  $f$  er irreducibel i ringen  $\mathbb{F}_3[X]$ .

**Matematik 2AL, vinteren 2000–2001**

1. Vis at gruppen  $(\mathbb{Z}/189)^*$  indeholder mindst tre elementer af orden 6.
2. Betragt cyklerne  $\rho = (1\ 2\ 3)$  og  $\sigma = (3\ 4\ 5)$  og  $\tau = (5\ 6\ 7)$  i  $S_7$ . Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af  $\rho\sigma$  og  $\sigma\tau$  og  $\tau\rho$ .
3. Bestem potensen  $\sigma^{665}$  af permutationen  $\sigma = (3\ 4)(2\ 4)(4\ 6)(4\ 5)(1\ 6)$  i  $S_6$ .
4. En permutation  $\mu$  i  $S_{12}$  har typen  $3^2 6^1$ . Hvilken type har  $\mu^3$ ?
5. Vis at grupperne  $D_6 \times C_2$  og  $A_4 \times C_2$  ikke er isomorfe.
6. Vis at der er netop to forskellige gruppehomomorfier fra  $C_6$  til  $C_2$ .
7. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow- $p$ -undergrupper i  $D_{12}$ .
8. Lad  $p$  være et primtal. Vis at Sylow- $p$ -undergrupperne i  $S_p$  er isomorfe med Sylow- $p$ -undergrupperne i  $S_{2p-1}$ .
9. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 220 har et element af orden 4, så er den cyklisk.
10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte  $3 \times 3 = 9$  lige store farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 5 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opsille et regneudtryk for antallet.
11. Angiv i Gauss' talring  $\mathbb{Z}[i]$  primopløsninger af tallene 2, 3, 5, 7, 11, 13, og  $8 + 3i$ .
12. Angiv i talringen  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  en primopløsning af tallet 31.
13. Vis at netop to af polynomierne  $X^6 - 25$ ,  $X^6 - 26$ , og  $X^6 - 27$  er reducible i polynomiumsringen  $\mathbb{Q}[X]$ .
14. Vis at polynomiet  $f = X^3 - X + 1$  er irreducibelt i polynomiumsringen  $\mathbb{F}_3[X]$ .
15. Angiv en primopløsning af polynomiet  $g = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 - X^2 + X + 1$  i polynomiumsringen  $\mathbb{F}_3[X]$ . [Vink: brug opgave 14.]

**Matematik 2AL, sommeren 2001**

1. Vis at gruppen  $(\mathbb{Z}/44)^*$  har et element af orden 5.
2. I den symmetriske gruppe  $S_5$  betragtes permutationen

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5).$$

Udregn cykelfremstilling, orden og fortegn af  $\sigma$ .

3. I den symmetriske gruppe  $S_5$  betragtes en permutation  $\tau$  som opfylder  $\tau \neq e$  og  $\tau^5 = e$ , hvor  $e$  er det neutrale element i  $S_5$ . Udregn cykeltype og fortegn af  $\tau$ .
  4. Angiv antallet af elementer af orden 3 i hver af følgende grupper:  $C_{60}$ ,  $A_4 \times C_5$ ,  $D_{30}$  og  $D_3 \times D_5$ .
  5. Lad  $(G, +)$  være en cyklisk gruppe og lad  $\varphi$  være en gruppehomomorfi fra  $(G, +)$  til  $(\mathbb{Q}, +)$ . Vis at  $\varphi$  ikke kan være surjektiv.
  6. Angiv de kommutative grupper af orden 56. Lad dernæst  $G$  være en gruppe af orden 56 som har netop 48 elementer af orden 7. Vis at  $G$  ikke er kommutativ.
  7. Lad  $G$  være en gruppe af orden 56 og lad  $a(G)$  betegne antallet af elementer i  $G$  af orden 7. Vis at  $a(G)$  er 6 eller 48.
  8. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow- $p$ -undergrupper i  $A_4 \times A_5$ .
  9. Hvor mange karusseller med 12 heste kan der laves når der er 2 farver heste at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
  10. Betragt den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\tau]$  hvor  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  er rod i  $X^2 - X - 1$ . Afgør hvilke af tallene  $4 + 3\tau$ ,  $5 + 4\tau$ ,  $6 + 5\tau$  og  $7 + 6\tau$  der er primelementer i  $\mathbb{Z}[\tau]$ , idet det må benyttes uden bevis at  $\mathbb{Z}[\tau]$  er et UFD.
  11. Vis at  $119 + 84\sqrt{2}$  ikke er et primelement i den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . Er  $119 + 84\sqrt{2}$  et irreducibelt element i  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ?
  12. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 4 i den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ .
  13. Afgør om  $X^2 + 1$  er irreducibelt som polynomium i ringen  $\mathbb{C}[X]$ , og om det er irreducibelt som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[X]$ .
- I de sidste to spørgsmål betragtes polynomierne  $f = X^4 + 3X + 3$  og  $g = X^2 + X + 1$ .
14. Vis at  $f$  og  $g$  er irreducible som polynomier i ringen  $\mathbb{Q}[X]$ .
  15. Vis, idet koefficienterne i  $f$  og  $g$  identificeres med deres restklasser modulo 3, at  $f$  og  $g$  ikke er irreducible som polynomier i ringen  $\mathbb{F}_3[X]$ .

**Matematik 2AL, vinteren 2001–2002**

1. Bestem i gruppen  $(\mathbb{Z}/630)^*$  ordenen af restklassen af 11. (Vink:  $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ .)
  2. I den symmetriske gruppe  $S_4$  betragtes permutationerne  $\sigma_2 = (1\ 2)$ ,  $\sigma_3 = (1\ 2\ 3)$  og  $\sigma_4 = (1\ 2\ 3\ 4)$ . Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af  $\sigma_2\sigma_3$  og  $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ .
  3. Bestem de mulige ordener af elementer i den symmetriske gruppe  $S_6$ .
  4. I den symmetriske gruppe  $S_{10}$  betragtes en permutation  $\tau$  som opfylder  $\tau^4 = e$ , hvor  $e$  er det neutrale element i  $S_{10}$ . Hvilke muligheder er der for cykeltypen af  $\tau$ ?
  5. Vis at grupperne  $D_3 \times C_5 \times C_6$  og  $S_3 \times C_3 \times C_{10}$  er isomorfe.
  6. Vis at grupperne  $D_{12} \times C_5$  og  $S_4 \times C_5$  ikke er isomorfe.
  7. Bestem for hvilke primtal  $p$  det gælder at Sylow- $p$ -undergrupperne i  $S_p$  er isomorfe med Sylow- $p$ -undergrupperne i  $D_p$ .
  8. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 234 har et element af orden 18, så er den cyklisk. (Vink:  $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$ .)
  9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves når der er 5 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
  10. Betragt den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\tau]$  hvor  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  er rod i  $X^2 - X - 1$ . Vis at der findes heltal  $a$ ,  $b$  og  $c$  så  $1 + a\tau$  er invertibel i  $\mathbb{Z}[\tau]$  og så  $1 + b\tau$  er et primelement i  $\mathbb{Z}[\tau]$ , men så  $1 + c\tau$  hverken er invertibel eller et primelement i  $\mathbb{Z}[\tau]$ . Det må benyttes uden bevis at  $\mathbb{Z}[\tau]$  er et UFD.
  11. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 73 i den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]$ .
  12. Afgør hvilke af primtallene 2, 3, 5, 7 og 11 der er primelementer i den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ .
  13. Afgør for hvert element  $\alpha$  i  $\mathbb{F}_5$  om polynomiet  $f_\alpha = X^3 + X^2 + \alpha$  er irreducibelt i ringen  $\mathbb{F}_5[X]$ .
- I de sidste to spørgsmål betragtes polynomiet  $g = X^4 + X^2 + 1$ .
14. Afgør om  $g$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{R}[X]$ .
  15. Afgør, idet koefficienterne i  $g$  identificeres med deres restklasser modulo 2, om  $g$  er irreducibel som polynomium i ringen  $\mathbb{F}_2[X]$ .

### Matematik 2AL, sommeren 2002

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Angiv en gruppeisomorfi  $\psi : (\mathbb{Z}/210)^* \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/30)^*$ . Bestem ordenen af elementet  $[31]_{210}$  i  $(\mathbb{Z}/210)^*$ .
2. Bestem cykelfremstillingen af  $\sigma = (1234)(34567)(89) \in S_9$  samt  $|\sigma|$  og  $\text{sign}(\sigma)$ .
3. Bestem  $\sigma \in S_{10}$ , så  $|\sigma| = 20$ , samt  $\tau \in S_{10}$ , så  $|\tau| > 20$ .
4. Bestem samtlige elementordener i gruppen  $C_2 \times C_3 \times C_4 \times C_7$ .
5. Afgør, om grupperne  $G = A_4 \times D_5$  og  $H = S_3 \times D_{10}$  er isomorfe.
6. Antag, at  $G$  er en *kommutativ* gruppe med  $|G| = 140$ , samt at der findes  $g \in G$  med  $|g| = 20$ . Bevis, at  $G$  er cyklisk. (Udnyt, at  $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ .)
7. Lad  $\varphi : A_5 \rightarrow C_{30}$  være en vilkårlig gruppehomomorfi. Begrund, at  $\varphi$  ikke kan være injektiv. Bevis, at  $\varphi$  er trivielt, dvs.  $\varphi(\sigma) = 1$  for alle  $\sigma \in A_5$ . (Udnyt, at kernen for  $\varphi$  er en normal undergruppe af  $A_5$ .)
8. Lad  $G$  være en gruppe af orden 2002. Begrund, at  $G$  ikke er simpel. (Udnyt faktoriseringen  $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$  til at bestemme antallet af Sylow-11-undergrupper.)
9. Begrund, at  $X^{2002} + 2002$  er irreducibelt i  $\mathbb{Z}[X]$ . (Udnyt, at  $2002 = 2 \cdot 1001$ .)
10. Afgør, om  $X^{2002} + 2002$  er irreducibelt i  $\mathbb{R}[X]$ .
11. Afgør, om  $X^{1936} - 1936$  er irreducibelt i  $\mathbb{Q}[X]$ .

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\xi]$  med  $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-2}$ . Det oplyses, at  $\mathbb{Z}[\xi]$  er UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten  $D(\xi)$ . Bestem normen  $N(x + y\xi)$ , når  $x, y \in \mathbb{Z}$ .
13. Afgør, om  $1 - 2\xi$  er divisor i  $13 + 10\xi$  inden for  $\mathbb{Z}[\xi]$ .
14. Afgør hvilke af elementerne  $1 + \xi$ ,  $3$ ,  $1 + 3\xi$  og  $8 + 3\xi$ , der er primelementer i  $\mathbb{Z}[\xi]$ .
15. Bestem normen  $N(21 + 6\xi)$  samt primopløsningen af  $21 + 6\xi$  inden for  $\mathbb{Z}[\xi]$ .

### Matematik 2AL, vinteren 2002–03

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Bestem ordenen af elementet  $[4]_n$  i den multiplikative gruppe  $(\mathbb{Z}/n)^*$  for  $n \in \{7, 11, 13\}$ . Bestem endvidere ordenen af  $[4]_{1001}$  i  $(\mathbb{Z}/1001)^*$ . ( $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ .)
2. Bestem cykelfremstilling, orden og fortegn for  $\sigma = (12)(123)(1234)(12345) \in S_5$ .
3. Antag, at  $\sigma, \tau \in S_9$  har  $|\sigma| = 5$ , og  $|\tau| = 6$ . Afgør, om  $|\sigma\tau| = 12$  kan forekomme. Afgør, om  $|\sigma\tau| = 30$  kan forekomme.
4. Betragt de additive kvotientgrupper  $\mathbb{Z}/123$  og  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Bestem en *injektiv* gruppehomomorfi  $\varphi: \mathbb{Z}/123 \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .
5. Lad  $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  være en gruppehomomorfi. Begrund, at  $\psi$  ikke er surjektiv.
6. Bestem i gruppen  $G \stackrel{\text{Def}}{=} D_3 \times D_6$  et element  $g^*$ , som ikke er det neutrale element, således at  $g^*$  kommuterer med alle elementer, dvs.  $g^*g = gg^*$  for alle  $g \in G$ .
7. Bevis, at grupperne  $G = D_3 \times D_6$  og  $H = A_4 \times D_3$  ikke er isomorfe. (Udnyt resultatet i opgave 6.)
8. Begrund, at gruppen  $G$  ikke er simpel, hvis  $|G| = 6009$ . (2003 er et primtal!)
9. Afgør, om  $X^{2002} - 2025$  er irreducibelt i  $\mathbb{Q}[X]$ .
10. Afgør, om  $X^{2002} - 2003$  er irreducibelt i  $\mathbb{R}[X]$ .
11. Afgør, om  $X^{2002} - 2003$  er irreducibelt i  $\mathbb{Z}[X]$ .

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring  $\mathbb{Z}[\xi]$  med  $\xi \stackrel{\text{Def}}{=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ , som er rod i  $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ . Ringen  $\mathbb{Z}[\xi]$  er UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten  $D(\xi)$ . Bestem normen  $N(x + y\xi)$ , når  $x, y \in \mathbb{Z}$ .
13. Afgør hvilke af elementerne  $\xi$ ,  $1 + \xi$  og  $1 - \xi$ , der er enheder i  $\mathbb{Z}[\xi]$ .
14. Afgør hvilke af elementerne  $1 - \xi$ ,  $3$  og  $1 + 3\xi$ , der er primelementer i  $\mathbb{Z}[\xi]$ .
15. Bestem normen  $N(4 + 5\xi)$  samt primopløsningen af  $4 + 5\xi$  inden for  $\mathbb{Z}[\xi]$ .