

5. Tapetgrupper.

(5.1) Definition. En (additiv) undergruppe L i \mathbb{R}^n kaldes et *gitter* eller et *lattice*, hvis der findes en basis (e_1, \dots, e_n) for vektorrummet \mathbb{R}^n således, at vektorerne i L netop er de vektorer, der har heltalskoordinater med hensyn til basen, dvs

$$L = \{x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Basen (e_1, \dots, e_n) siges også at være en *basis* for gitteret. Et gitter i \mathbb{R}^n for $n > 1$ har altid uendelig mange baser. Bemærk, at det ikke antages, at baserne er ortonormale.

(5.2) Lemma. *Lad L være et gitter i \mathbb{R}^n . Da vil enhver begrænset delmængde K af \mathbb{R}^n kun indeholde endelig mange vektorer fra L .*

Bevis. Lad (e_1, \dots, e_n) være en basis for gitteret L . Der findes da en positiv konstant c således, at der for alle $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gælder uligheden,

$$c(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|^2. \quad (*)$$

Højresiden i uligheden, som funktion af $x \in \mathbb{R}^n$, er nemlig kontinuert. Den er positiv, når $x \neq 0$, idet vektorerne e_i er lineært uafhængige. Specielt er højresiden positiv på enhedskuglen i \mathbb{R}^n . Da enhedskuglen er kompakt, antager højresiden, som funktion defineret på enhedskuglen, sin mindsteværdi. Lad c være denne mindsteværdi. Da er højresiden større end eller lig med c , når x ligger på enhedskuglen. Med andre ord gælder uligheden (*), når x er en enhedsvektor. En vektor forskellig fra nul kan normeres til en enhedsvektor. Heraf følger let, at uligheden (*) gælder for alle $x \neq 0$. Og trivielt gælder uligheden, når $x = 0$.

Antag nu, at $K \subseteq \mathbb{R}^n$ er begrænset, fx med $\|v\|^2 \leq C$ for alle $v \in K$, med en positiv konstant C . Lad $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ være en vektor i $L \cap K$. Da $v \in L$, er koefficienterne x_i hele tal, og da $v \in K$, følger det af (*), at $c(x_1^2 + \dots + x_n^2) \leq C$. Dette er øjensynlig kun muligt for endelig mange x_1, \dots, x_n . Altså er $L \cap K$ en endelig mængde af vektorer. \square

(5.3) Observation. Af Lemma (5.2) følger specielt, at der blandt vektorerne i et gitter L findes en vektor af mindst mulig positiv norm. Denne mindste positive norm er samtidig den mindste afstand mellem to forskellige vektorer i L . Afstanden mellem u og v er jo normen af $u - v$, og hvis $u, v \in L$, så er også $u - v$ i L .

(5.4) Definition. En flytningsgruppe $G \subseteq E(n)$ vil vi kalde en *krystallografisk gruppe*, hvis translationsgruppen T_G for G er et gitter.

Antag, at et gitter L er translationsgruppen for en krystallografisk gruppe G . Lad $H = \overline{G}$ være punktgruppen for G . Som vi har set i (4.4) gælder der så, at gitteret L er invariant under gruppen H i følgende forstand:

$$(\dagger) \quad A \in H, v \in L \implies Av \in L.$$

Denne betingelse, der kaldes den *krystallografiske betingelse*, medfører restriktioner på hvilke par H, L , betående af en undergruppe H og et gitter L , der kan være af formen \overline{G}, T_G for en krystallografisk gruppe G .

(5.5) Sætning. Punktgruppen \overline{G} for en krystallografisk gruppe er endelig.

Bevis. Lad (e_1, \dots, e_n) være en basis for gitteret T_G . Af Lemma (5.2) følger specielt, at for hvert i findes der i T_G kun endelig mange vektorer af samme norm som e_i . Betragt nu en matrix A i punktgruppen \overline{G} . Af den krystallografiske betingelse følger, at Ae_i tilhører T_G . Som lineær afbildning er $x \mapsto Ax$ helt bestemt ved sine værdier Ae_i på basisvektorerne. Yderligere er $x \mapsto Ax$ en isometri, så Ae_i har specielt samme norm som e_i . Der er derfor kun endelig mange muligheder for billederne Ae_i . Altså er der kun endelig mange muligheder for matricen A . Punktgruppen \overline{G} er derfor endelig. \square

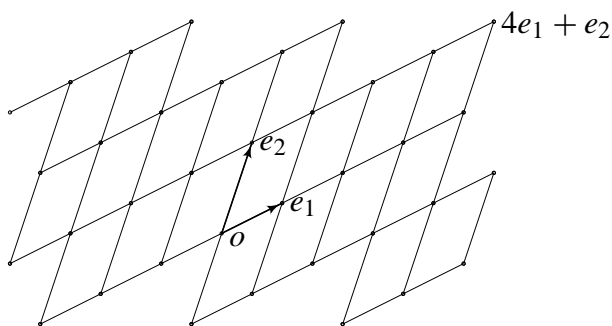
(5.6) Definition. Krystallografiske grupper i rummet \mathbb{R}^3 kaldes også *rumgrupper*. De svarer til symmetrigrupper for uendelige krystalstrukturer, og klassifikationen af dem svarer til klassifikation af krystaller. Vi vil i det følgende kun betragte forholdene i planen \mathbb{R}^2 . Her kaldes en krystallografisk gruppe også en *tapetgruppe*. For en sådan er translationsundergruppen altså et plant gitter, dvs en additiv undergruppe $L \subseteq \mathbb{R}^2$ frembragt af 2 lineært uafhængige vektorer e_1, e_2 ,

$$L = \{x_1e_1 + x_2e_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Et givet gitter har altid uendelig mange baser. For eksempel gælder, at hvis (e_1, e_2) er en basis, så er også $(e_1, e_2 + me_1)$ en basis for alle $m \in \mathbb{Z}$. Vi har nemlig

$$x_1e_1 + x_2e_2 = (x_1 - mx_2)e_1 + x_2(e_2 + me_1),$$

og her er x_1 og x_2 hele tal, hvis og kun hvis $x_1 - mx_2$ og x_2 er hele tal.

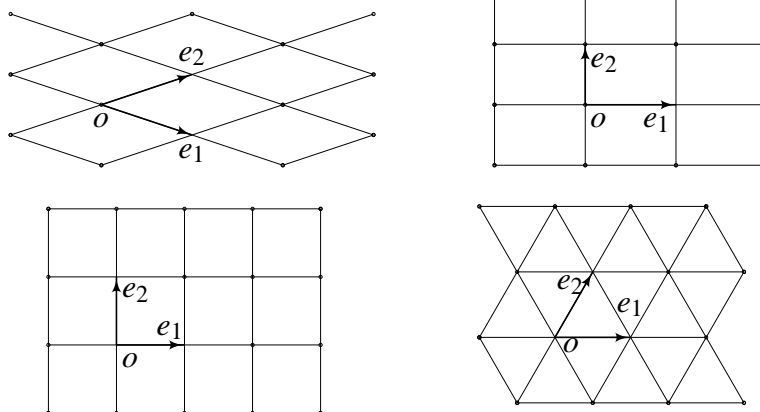


Bemærk, at linierne på figuren *ikke* er en del af gitteret. Det er liniernes skæringspunkter, der udgør gitteret.

Et plant gitter kaldes *rombisk*, hhv *rektangulært*, hhv *kvadratisk*, hhv *hexagonalt*, hvis det har en basis (e_1, e_2) , hvor vektorerne e_1 og e_2 opfylder, at de har samme norm, hhv er ortogonale, hhv har samme norm og er ortogonale, hhv har samme norm og har en indbyrdes vinkel på $\pi/3$.

Bemærk, at gitteret på figuren ovenfor faktisk er et kvadratisk gitter: vektorerne e_1 og $e_2 - e_1$ er ortogonale og af samme længde, og de er også en basis.

Et kvadratisk gitter er både rektangulært og rombisk, et hexagonalt gitter er også rombisk.

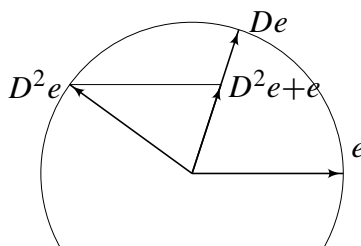


(5.7) Sætning. Punktgruppen \overline{G} for en tapetgruppe G må være en af grupperne C_k eller D_k for $k = 1, 2, 3, 4, 6$. Hvis punktgruppen er C_1 eller C_2 kan gitteret T_G være vilkårligt. Hvis punktgruppen er D_1 eller D_2 må gitteret T_G være rombisk eller rektangulært. Hvis punktgruppen er C_4 eller D_4 må gitteret T_G være kvadratisk. Hvis punktgruppen er C_3, D_3, C_6 eller D_6 , må gitteret T_G være hexagonalt.

Bevis. Punktgruppen \overline{G} er en undergruppe i $O(2)$. Af Sætning (5.5) følger, at \overline{G} er endelig. Af Lemma (1.5) følger derfor, at \overline{G} er enten den cykliske undergruppe C_k eller en diedergruppe D_k , for passende k . Det skal først vises, at $k \leq 6$ og at $k = 5$ er udelukket.

Vælg $e \neq 0$ blandt vektorerne i T_G med mindst mulig positiv norm. Drejningen D med vinklen $2\pi/k$ tilhører \overline{G} . Af Observation (4.3) følger derfor for hver vektor $v \in T_G$, at vi har $Dv \in T_G$ og dermed også $Dv - v \in T_G$. Idet vi antager $k \geq 3$, er vektorerne $0, e$ og De hjørnerne i en trekant. Den er ligebenet, idet to sider har længden $\|e\| = \|De\|$. Den tredje side har længden $\|De - e\|$, og $De - e$ tilhører gitteret. Valget af e sikrer derfor, at den tredje sides længde mindst er lig med længden af de to andre. Heraf følger, at topvinklen $2\pi/k$ mindst er $\pi/3$. Altså er $k \leq 6$.

For at udelukke $k = 5$ betragter vi vektoren $D^2e + e$. Den er proportional med De , og når $k = 5$ er den af mindre længde. Men da $D^2e + e \in T_G$ og $\|De\| = \|e\|$, er dette i modstrid med valget af e .



Hermed er det vist, at punktgruppen er en af de 10 angivne grupper. En del af argumenterne for de resterende påstande samler vi i to hjælperesultater om gittere $L \subseteq \mathbb{R}^2$:

Lemma. (1) Antag, at der i L er to vektorer e, f af den mindste positive norm, med $f \neq \pm e$. Da er (e, f) en basis for gitteret.

(2) Antag, at L er invariant under en lineær spejling $v \mapsto Sv$. Da har L enten (i) en basis af formen (e, Se) , eller (ii) en basis af formen (e, f) , hvor e, f er ortogonale, og $Se = e$.

Bevis. (1) De to vektorer $e, f \in L$ er nemlig lineært uafhængige, så det skal vises, at en vilkårlig vektor $u \in L$ kan skrives som en linearkombination,

$$u = \lambda e + \mu f, \quad (*)$$

med heltalskoefficienter λ, μ . Hertil bemærkes, at da (e, f) er en basis for vektorrummet \mathbb{R}^2 , har u en fremstilling (*), hvor λ, μ er reelle tal. Subtraheres fra u en passende heltalslinearkombination af e, f , kan vi opnå en ny vektor $u \in L$ således, at der i fremstillingen (*) gælder, at $0 \leq \lambda < 1$ og $0 \leq \mu < 1$. Det er nok at vise, at $u = 0$, altså at $\lambda = \mu = 0$. De antagne uligheder for λ, μ medfører, at u ligger i romben med hjørnerne $0, e, f, e + f$. Afstanden fra u til det nærmeste af rombens 4 hjørner er derfor højst sidelængden divideret med $\sqrt{2}$; specielt er afstanden strengt mindre end sidelængden $\|e\|$. På den anden side er afstanden normen af differensvektoren, og det er normen af en vektor i gitteret. Valget af e sikrer derfor, at afstanden må være 0, altså at u er et af de fire hjørner. Ulighederne for λ, μ sikrer nu, at $u = 0$, som ønsket. Hermed er (1) bevist.

For at bevise (2) vælger vi en vektor $e \neq 0$ i L af mindst mulig positiv norm. Det er let at se, at e kan suppleres med en vektor $f \in L$ til en basis (e, f) . Hvis $Se \neq \pm e$, så følger det i øvrigt af (1), at (e, Se) er en sådan basis. Altså indtræffer mulighed (i).

Antag derfor, at $Se = \pm e$, og først, at $Se = e$. Vektoren e bestemmer så akse for spejlingen S . Vektoren $f + Sf$ ligger på akse, og i gitteret. Altså er $f + Sf = \lambda e$ med $\lambda \in \mathbb{Z}$. Erstatte f med $f - e$, ændres λ til $\lambda - 2$. Derfor kan vi antage, at $\lambda = 0, 1$. Hvis $\lambda = 0$, så er $Sf = -f$, og så er f vinkelret på e , og gitteret er rektangulært; specielt indtræffer (ii). Hvis $\lambda = 1$, så er $Sf + f = e$, og så er også (f, Sf) en basis for gitteret; specielt indtræffer (i) (med $e := f$).

Hvis $Se = -e$, så er e vinkelret på spejlingsaksen. Det følger nu tilsvarende først, at $f - Sf = \lambda e$ med $\lambda \in \mathbb{Z}$, og dernæst, at vi kan antage $\lambda = 0, 1$. Hvis $\lambda = 0$, så er $f = Sf$, og derfor indtræffer (ii) (med $(e, f) := (f, e)$). Hvis $\lambda = 1$, så er også (f, Sf) en basis, og derfor indtræffer (i) (med $e := f$).

Hermed er hjælperesultaterne bevist. \square

Nu følger påstandene i Sætningen: Hvis \overline{G} indeholder en drejningsmatrix D med vinklen $2\pi/k$ og $k \geq 3$, kan (1) anvendes, idet e vælges som en vektor i T_G med den mindste positive norm, og $f := De$. Det følger, for $k = 3, 6$, at gitteret er hexagonalt, og for $k = 4$, at det er kvadratisk. Hvis \overline{G} indeholder en spejlingsmatrix S , så følger det af (2), at gitteret må være rombisk eller rektangulært. Hermed er sætningen bevist. \square

(5.8). Sætning (5.7) udsiger, at der højst er 10 undergrupper H af $O(2)$, der kan forekomme som punktgruppe \overline{G} for en tapetgruppe G , og mere præcist, at der højst er følgende 12 muligheder for kombinationer H, L , der kan forekomme som \overline{G}, T_G for en tapetgruppe G :

C_1 , vilkårligt	C_2 , vilkårligt	C_3 , hexagonalt	C_4 , kvadratisk
C_6 , hexagonalt			
D_1 , rektangulært	D_1 , rombisk	D_2 , rektangulært	D_2 , rombisk
D_3 , hexagonalt	D_4 , kvadratisk	D_6 , hexagonalt	

For hver af de 12 kombinationer H, L kan gitteret af den anførte form vælges således, at den krystallografiske betingelse er opfyldt, dvs således, at L er invariant under gruppen H . Gruppen C_1 består kun af identiteten, så ethvert gitter er invariant under C_1 . Gruppen C_2 består af identiteten og halvdrejningen $v \mapsto -v$. Ethvert gitter er derfor også invariant under C_2 . Gruppen C_4 er frembragt af drejningen på $\pi/2$. Følgelig er ethvert kvadratisk gitter invariant under C_4 . Endelig er ethvert hexagonalt gitter invariant under C_3 og under C_6 .

Betragt dernæst de tilsvarende diedergrupper D_k . Gruppen D_1 er den cykliske gruppe af orden 2 frembragt af en spejling, og gruppen D_2 er frembragt af en spejling og halvdrejningen $x \mapsto -x$. Det er klart, at et rektangulært gitter er invariant under spejlingen i linien bestemt ved en af basisvektorerne og at et rombisk gitter er invariant under spejlingen i linien bestemt ved summen af de to basisvektorer. Både et rombisk gitter og et rektangulært gitter er således invariante under D_1 og under D_2 . Endelig er det klart, at et kvadratisk gitter naturligt er invariant under D_4 og at et hexagonalt gitter er invariant under D_3 og under D_6 . For gruppen D_3 er der endda *to forskellige* muligheder for beliggenheden af det hexagonale gitter: D_3 er symmetrigruppen for en regulær trekant, og gitteret kan vælges enten med basis i 2 af trekantens hjørner, eller drejet $2\pi/12$ i forhold hertil. Den første mulighed er øjensynlig karakteriseret ved, at de to basisvektorer ligger på akser for spejlingerne i D_3 .

Hvis den krystallografiske betingelse for H, L er opfyldt, findes der altid en tapetgruppe G således, at $\overline{G} = H$ og $T_G = L$. Det følger nemlig af konstruktionen i (4.4), at flytningerne i $E(2)$ af formen,

$$x \mapsto Ax + v, \quad \text{hvor } A \in H \text{ og } v \in L,$$

udgør en sådan gruppe G . Den herved bestemte tapetgruppe G er split, og det følger af overvejelserne i (4.5), at enhver split tapetgruppe, bortset fra en translation af origo, er af denne form.

Der er derfor splittede tapetgrupper svarende til de 12 kombinationer, og med de to forskellige muligheder for D_3 som punktgruppe fås i alt 13 klasser af splittede tapetgrupper.

Den fulde klassifikation er følgende: *Der er 17 klasser af tapetgrupper, nemlig de 13 klasser af splittede tapetgrupper og yderligere 4 klasser af ikke-splitte grupper: 1 klasse for D_1 med et rektangulært gitter, 2 klasser for D_2 med et rektangulært gitter, og 1 klasse for D_4 med et kvadratisk gitter.*

Tapetgrupperne er de krystallografiske grupper i planen. For rummet \mathbb{R}^3 kan man tilsvarende vise, at der er 230 klasser af rumgrupper.

(5.9) Bemærkning. Lad os skitsere et bevis for klassifikationen af tapetgrupperne. Vi antager, at G er en ikke-split tapetgruppe, og vi skal vise, at der er 4 muligheder for G , og at de forekommer. I beviset bruges, at homomorfien $G \rightarrow \overline{G}$ er surjektiv: hver matrix $A \in \overline{G}$ kan altså løftes til en flytning $f \in G$, dvs en flytning af formen $f(x) = Ax + b$.

For det første må \overline{G} være en diedergruppe. Er nemlig \overline{G} den cykliske gruppe C_k , kan vi løfte drejningen D med vinklen $2\pi/k$ til en flytning $d \in G$. Det følger af klassifikationen i (2.6), at d er en drejning med vinklen $2\pi/k$ omkring et fixpunkt $p \in \mathbb{R}^2$. Isotropigruppen G_p indeholder så den cykliske undergruppe $\langle d \rangle$, og denne undergruppe afbildes surjektivt, og derfor bijektivt på \overline{G} . Altså er G split.

Der findes altså spejlinger S i \overline{G} . Betragt en sådan spejling S , og en flytning $s(x) = Sx + b$ i G , som løfter S . Ifølge klassifikationen i (2.6) er s en glidespejling, så efter en eventuel translation af origo kan vi antage, at b ligger på spejlingsaksen.

Antag først, at mulighed (i) (nævnt i beviset for Sætning (5.7)) indtræffer for S og gitteret T_G . Det påstås, at S så kan løftes til en spejling i G . Ifølge antagelsen har T_G nemlig en basis af formen (e, Se) , så spejlingsaksen er bestemt ved vektoren $e + Se$. Altså er $b = \lambda(e + Se)$. Vi kan sammensætte s med en translation i G ; specielt kan vi fra b trække et heltalsmultiplum af $e + Se$. Derfor kan vi antage, at $0 \leq \lambda < 1$. Kvadratet s^2 ligger igen i G , og det er translationen med forskydning $2b$. Altså ligger $2b \in T_G$, dvs $2\lambda \in \mathbb{Z}$. Det giver mulighederne $\lambda = 0$ og $\lambda = \frac{1}{2}$. I det første tilfælde er $b = 0$, og så er s en spejling, som ønsket. I det andet tilfælde er $s(x) = Sx + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}Se$. Den sammensatte flytning $s' := t_{-e}s$ er også en løftning af S , af formen $s'(x) = Sx - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}Se$. Øjensynlig er $\frac{1}{2}Se$ et fixpunkt for s' . Derfor er s' en spejling, som ønsket.

Antag dernæst, at mulighed (ii) indtræffer, altså at der findes en ortogonal basis (e, f) for T_G med $Se = e$. Da er e spejlingens akse, så $b = \lambda e$. Fra b kan trækkes et passende heltalsmultiplum af e , så det kan antages, at $0 \leq \lambda < 1$. Da kvadratet s^2 er translation med $2b$, er $2b \in T_G$, og følgelig er $2\lambda \in \mathbb{Z}$. Altså er $\lambda = 0$ eller $\lambda = \frac{1}{2}$. Hvis $\lambda = 0$, er $b = 0$ og s er en spejling. Hvis $\lambda = \frac{1}{2}$, så er s en glidespejling af formen,

$$s(x) = Sx + \frac{1}{2}e. \quad (*)$$

Vi kan altså løfte S enten til en spejling s , eller til en glidespejling af formen (*).

Betragt nu den ikke-splitte tapetgruppe G , med $\overline{G} = D_k$. Punktgruppen \overline{G} er frembragt af én spejling, hvis $k = 1$, og af to spejlinger, hvis $k \geq 2$. Hvis de frembringende spejlinger i \overline{G} kunne løftes til spejlinger i G , ville G være split. Det er nemlig klart for $k = 1$, og hvis $k \geq 2$ ville skæringspunktet p for de to løftede spejlingers akser være et fælles fixpunkt, og isotropigruppen G_p ville afbildes surjektivt og dermed bijektivt på \overline{G} .

Der er altså mindst én spejling S i \overline{G} , som ikke kan løftes til en spejling i G . Af de foregående overvejelser følger derfor, at (ii) indtræffer: Vi kan konkludere, at gitteret T_G er rektangulært, med basis e, f , hvor $Se = e$, og S kan løftes til en glidespejling s i G af formen (*).

Herefter er $k = 3, 6$ udelukket. For $k = 1$ er der kun én spejling i $\overline{G} = D_1$, og den kan altså løftes til en glidespejling af formen (*). For $k = 2$ er der to spejlinger i \overline{G} , og det giver to muligheder: ingen af dem kan løftes til spejling eller én af dem kan. Betragt endelig $k = 4$. Vælg en spejling S i \overline{G} , som ikke kan løftes til en spejling i G , og løft S til en glidespejling af formen (*), med en ortogonal basis (e, f) for gitteret. Da gitteret er invariant under drejningen med vinklen $\pi/2$, er gitteret ortogonalt: e og f har samme norm. Betragt nu spejlingen \tilde{S} i D_4 med akse drejet $-\pi/4$ i forhold til akse for S . Vi har allerede fastlagt basen for T_G , så det er udelukket, at T_G har en ortogonal basis med en basisvektor på akse for \tilde{S} . Derfor kan mulighed (ii) ikke indtræffe for \tilde{S} . Af overvejelserne ovenfor følger så, at \tilde{S} kan løftes til spejling \tilde{s} . Vi kan fx vælge origo som skæringspunkt mellem akserne for s og \tilde{s} . Herefter er G fastlagt.

Det skal yderligere vises, at faktisk findes tapetgrupper i hver af de ikke-splitte klasser. Vi vælger som eksempel her at beskrive de tapetgrupper G , som indeholder en kvartdrejning, dvs en drejning med vinklen $\pi/2$ omkring et punkt. Det følger af Sætning (5.7), at punktgruppen \overline{G} må være C_4 eller D_4 , og af diskussionen i (5.8) fremgår, at der er tre muligheder: en split gruppe med punktgruppe C_4 , en split gruppe med punktgruppe D_4 , samt en ikke-split gruppe med punktgruppe D_4 .

I alle tilfælde må gitteret T_G være kvadratisk. Vi kan antage, at det er gitteret \mathbb{Z}^2 frembragt af den kanoniske basis (e_1, e_2) for \mathbb{R}^2 . Vektorerne i gitteret er altså vektorer $u = (u_1, u_2)$ med heltalskoordinater u_1, u_2 , og translationerne i G er translationerne med sådanne vektorer. Gruppen G skal indeholde en drejning d med vinklen $\pi/2$ omkring et punkt. Vi kan antage, at det er omkring origo, altså at $d(x) = Dx$, hvor D er matricen,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Antag først, at \overline{G} er den cykliske gruppe C_4 bestående af de fire potenser D^j for $j = 0, 1, 2, 3$. I dette tilfælde er G som nævnt split, og G består af alle flytninger af formen,

$$x \mapsto D^j x + u, \quad \text{for } j = 0, 1, 2, 3 \text{ og } u \in \mathbb{Z}^2. \quad (5.9.1)$$

Flytningerne er translationer for $j = 0$, drejninger med vinkel $\pm\pi/2$ for $j = 1, 3$, og halvdrejninger for $j = 2$. For at få et overblik over drejningerne i G bestemmes deres fixpunkter.

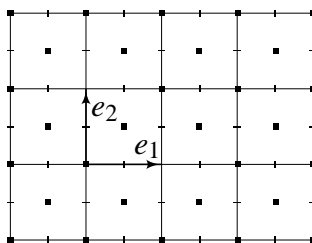
Fixpunkter p for flytningen $x \mapsto D^j x + u$ bestemmes ved at løse ligningen $p = D^j p + u$. For $j = 1$ har vi $(1 - D)p = u$, og

$$1 - D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Fixpunkterne er således alle punkter $(v_1/2, v_2/2)$, hvor $v_1 = u_1 - u_2$ og $v_2 = u_1 + u_2$ med hele tal u_1, u_2 , dvs hvor v_1, v_2 er hele tal *af samme paritet*. Punkterne er altså dels vektorerne i gitteret \mathbb{Z}^2 , dels midtpunkterne af de enhedskvadrater, som gitterpunkterne deler planen i. Det er klart, at det er de samme punkter, som er fixpunkter for flytningerne af formen $x \mapsto D^3 x + u$.

For $j = 2$ har vi, at $1 - D^2$ er 2 gange enhedsmatrix. Fixpunkterne for flytninger af formen $x \mapsto D^2 x + u$ er derfor netop punkterne $(u_1/2, u_2/2)$, hvor u_1, u_2 er hele tal.

Gruppen G består således af alle translationer med en heltalsvektor, af alle drejninger på et multiplum af $\pi/2$ omkring et punkt $(v_1/2, v_2/2)$, hvor v_1 og v_2 er hele tal af samme paritet, samt af alle halvdrejninger omkring et punkt $(u_1/2, u_2/2)$, hvor u_1 og u_2 er hele tal.



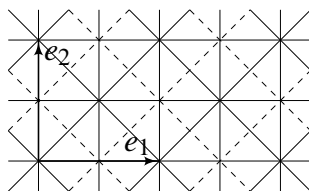
(b0) Betragt dernæst tilfældet, hvor G er split med $\overline{G} = D_4$. Vi kan antage, at det er isotropigruppen i origo, der afbildes bijektivt på \overline{G} , og at denne isotropigruppe er symmetrigruppen for kvadratet med hjørnerne $\pm e_1, \pm e_2$. I G ligger så drejningen $x \mapsto Dx$ med vinklen $\pi/2$ og spejlingen $x \mapsto Sx$ i førsteaksen, bestemt ved matricen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gruppen G er så gruppen af alle flytninger af formen (5.9.1) eller af følgende form:

$$x \mapsto SD^j x + u, \quad \text{for } j = 0, 1, 2, 3 \text{ og } u \in \mathbb{Z}^2. \quad (5.9.2)$$

Flytningerne i (5.9.2) er spejlinger eller glidespejlinger. Det er ikke svært at bestemme deres spejlingsakser:

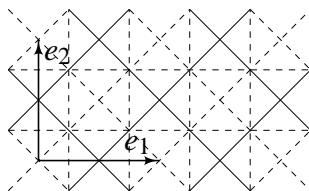


De fuldt optrukne linier er spejlingsakser for en spejling i G (og uendelig mange glidespejlinger). De stiplede linier er akser for uendelig mange glidespejlinger i G , hvoraf ingen er spejlinger.

(b1) Betragt endelig tilfældet, hvor G er ikke-split, med $\overline{G} = D_4$. Med notationen ovenfor har vi i G glidespejlingen s i (*), der løfter S , og spejlingen \tilde{s} , som løfter \tilde{S} . Produktet $S\tilde{s}$ er drejningen D med vinklen $\pi/2$, og den løftes af den sammensatte flytning $d = s\tilde{s}$. Vi kan antage, at $(e, f) = (e_1, e_2)$. Vælges origo som skæringspunktet mellem spejlingsakserne (for glidespejlingen s og for spejlingen \tilde{s}), så er vektoren $-\frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_2$ fixpunktet for d . Vælges omvendt denne vektor som origo, så beskrives d ved den lineære drejning $d(x) = Dx$ og glidespejlingen s får formen $s(x) = Sx + c$ med $c := \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$. Altså må G så bestå af alle flytninger af formen (5.9.1) eller af følgende form:

$$x \mapsto SD^j x + c + u, \quad \text{for } j = 0, 1, 2, 3 \text{ og } u \in \mathbb{Z}^2. \quad (5.9.3)$$

Omvendt er det ikke svært at vise, at flytningerne af formen i (5.9.1) eller (5.9.3) udgør en gruppe. Flytningerne af den sidste form er spejlinger eller glidespejlinger:



Igen er de fuldt optrukne linier spejlingsakser for en spejling i G og de stiplede linier er akser for glidespejlinger, hvoraf ingen er spejlinger.

Bemærk, at de to grupper bestemt i (b0) og (b1) kan skelnes ved beskrivelsen af spejlingsakserne. I gruppen i (b0) findes der spejlinger, hvis akser går gennem fixpunkterne for kvartdrejningerne i G , for gruppen i (b1) går akserne for spejlingerne ikke gennem disse fixpunkter.

(5.10) Bemærkning. De betragtede grupper i planen hedder tapetgrupper, fordi de er relaterede til tapeter. Symmetrigruppen for et tapet er en tapetgruppe, og omvendt vil enhver tapetgruppe G frembringe tapeter på følgende måde. Lad F være en figur i \mathbb{R}^2 . Vi kan tænke på F som en tegning, bestående af et antal begrænsede kurver. Dan så foreningsmængden,

$$F^* := \bigcup_{g \in G} g(F).$$

Foreningsmængden indeholder specielt alle translationer $t_u(F)$ for $u \in T_G$, dvs vi „genfinder“ figuren F periodisk i F^* . Desuden indeholder F^* periodisk en række figurer, der er kongruente med F , svarende til de flytninger i G , der ikke er translationer. Foreningsmængden F^* er altså et *tapet*. Det er klart, at flytningerne i G er symmetrier af F^* : for hver flytning $g \in G$ gælder, at $g(F^*) = F^*$. Det er også næsten klart, at hvis den givne figur F er tilstrækkeligt usymmetrisk, så er G netop symmetrigruppen $E(F^*)$ for tapetet F^* .

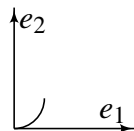
Tapetet F^* kan også fås som en foreningsmængde af translationer af en figur. Antag, at punktgruppen \overline{G} har orden k , og vælg k flytninger g_1, \dots, g_k i G således, at matricerne \overline{g}_i er samtlige matricer i \overline{G} . Betragt den endelige foreningsmængde,

$$\tilde{F} := \bigcup_{i=1}^k g_i(F).$$

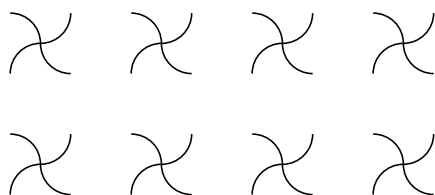
For en given flytning $g \in G$ findes et i således, at $\overline{g} = \overline{g}_i$. Altså er gg_i^{-1} en translation i G , dvs af formen t_u , hvor $u \in T_G$. Det følger, at $g = t_u g_i$, og specielt er $g(F) = t_u g_i(F) \subseteq t_u(\tilde{F})$. Heraf følger, at tapetet F^* er foreningsmængden,

$$F^* = \bigcup_{u \in T_G} t_u(\tilde{F}).$$

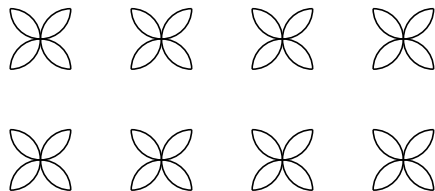
(5.11) Eksempel. Betragt de tre grupper fra Eksempel (5.9). Lad F være figuren bestående af en kvartcirkel med radius $\frac{1}{4}$ og centrum i $(0, \frac{1}{4})$:



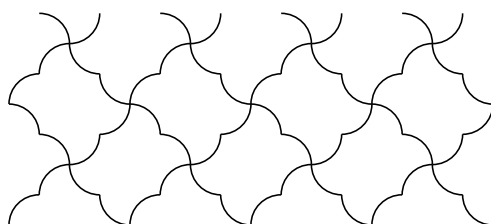
For gruppen behandlet i (5.9)(a) får vi det tilsvarende tapet F^* :



For gruppen i **(b0)** får vi tapetet:



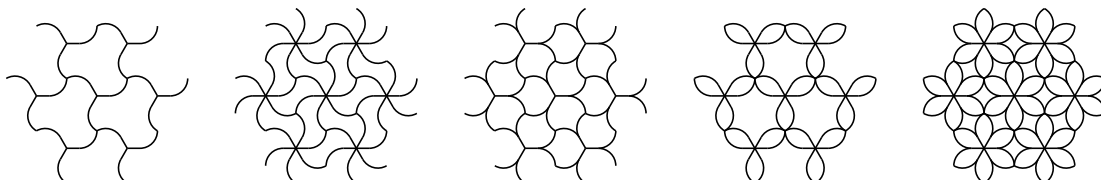
Og endelig får vi for gruppen i **(b1)**:



(5.12) Eksempel. Betragt tilsvarende kurven F bestående af et stykke af førsteaksen og en kvartcirkel:



Trekanten bestemmer et hexagonalt gitter. Kurven ender midt i trekanten (som ikke er en del af kurven). Her er (en del) af tapeterne frembragt af F under de 5 tapetgrupper, der har hexagonalt gitter (med punktgrupper C_3 , C_6 , D_3 (2 stk), og D_6):



(5.13) Opgaver.

1. Lad $L \subseteq \mathbb{R}^2$ være et gitter med basis (e, f) , og lad $u = ae + bf$ og $v = ce + df$ være vektorer i L . Vis, at (u, v) er en basis for L , hvis og kun hvis heltalsmatricen $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ har determinant ± 1 . Slut heraf, at en vektor $u = ae + bf \in L$ kan suppleres med en vektor v til en basis for L , hvis og kun hvis tallene a, b er primiske.

2. Lad $L \subseteq \mathbb{R}^2$ være et gitter, som er både rombisk og rektangulært. Vis, at L er kvadratisk. [Vink. Antag, at (e, f) er en ortogonal basis for L , med $\|e\| \leq \|f\|$. Lad S være spejlingen defineret ved, at den ombytter to lige lange vektorer i en anden basis for L . Overvej hvilke muligheder, der er for vektoren Se .]