

## Stemning og skalaer.

I det følgende lægges op til en opgave, der går dybere ind i noget af den teori, der ligger bag den vestlige musik. Historisk set har begreberne konsonans og dissonans haft en enorm betydning for musikken. Når to toner konsonerer, kan man sige, at de lyder godt sammen, mens dissonerende toner synes at skære i ørerne. I udformningen af en skala kan der, som vi skal se, opstå nogle problemer, og disse har været udgangspunkt for mange hundrede års udvikling inden for musikteorien.

På musikside vil eleven kunne arbejde ud fra en historisk vinkel, idet forholdet, til hvad der dissonerer og konsonerer, har ændret sig flere gange i tidens løb.

Eleven vil også kunne give sig i kast med en værkanalyse af eksempelvis et af stykkerne fra Bachs "Das Wohltemperierte Klavier", om end sammenhængen musik og matematik imellem her bliver lidt mere udvisket.

På matematikside, vil man kunne arbejde med teori om kædebrøker eller med harmoniske rækker, hvilket i begge tilfælde vil være nyt stof for eleverne. Eleverne vil her kunne bevise nogle sætninger, der kan være nemme eller svære alt efter ambitionsniveau.

Projektet her er i udgangspunktet tænkt som et studieretningsprojekt men vil også nemt kunne transformeres til et AT-forløb.

### Faglige forudsætninger, matematik

Mat B

### Faglige forudsætninger, musik

Mus A

### Faglige mål, matematik

- At opnå et basalt kendskab til noget af teorien bag endelige matematiske rækker, samt til notationen i forbindelse hermed.
- At opnå kendskab til kædebrøker og nogle sætninger herom.
- At opnå indsigt i hvorledes matematik og musik spiller sammen på et grundlæggende plan.

### Faglige mål, musik

- At kunne forstå den udvikling der historisk set er foregået i forhold til stemning og skalaer.
- At gå i dybden med nogle stemningsmetoder (pythagoræisk stemning, ren stemning og veltempereret stemning, og se hvordan der historisk set er sket en udvikling i brugen af disse.
- At undersøge nye skalaer (f.eks. arabiske kvarttoneskalaer) og herved opdage alternativer til den vestlige musiks harmonilære og teori.

### Nærmere beskrivelse af projektemnet

Eleven skal undersøge teorien bag pythagoræisk stemning, ren stemning og veltempereret stemning. Allerede hos de gamle grækere vidste man, at to toner med frekvenserne  $f_1$  og  $f_2$  klingede godt sammen, såfremt forholdet  $f_1/f_2$  var et helt tal delt med et andet helt tal, og disse tal ikke var for store. Forholdet 2/1 angiver oktaven, 3/2 kvinten, 4/3 kvarten, 5/4 durtertsen og 6/5 moltertsen, og særligt de tre førstnævnte mente man lød godt.

Her ses en parallel til den harmoniske række. Har vi en streng med frekvensen  $f_i$  vil bølgelængderne af overtonerne være proportionelle til 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... Her kan man altså bringe noget teori om rækker i spil og evt. vise nogle sætninger om konvergens og divergens (Jf. Carstensen, 1997)

De pythagoræiske intervaller blev dannet ved at gå et antal rene kvinter op og derefter et antal oktaver ned for at ramme tæt på udgangspunktet. Eksempelvis findes sekunden (intervallet fra c til d) ved at gå to kvinter op og en oktav ned:  $(3/2)^2 \cdot (1/2)^1 = 9/8$ .

Går vi nu 12 kvinter op fra vores udgangstone sker der dog noget uheldig. Begynder vi eksempelvis på klaverets dybeste c og går tolv kvinter op vil vi gennemløbe tonerne c-g-d-a-e-h-f#-c#-g#-d#-a#-e#-h#. På klaveret er tonerne e# og h# enharmoniske med f og c, og vi lander således på udgangspunktet. Altså må man formode, at forholdet mellem disse brøker er lig 1. dette er dog ikke tilfældet, da  $(3/2)^{12} \cdot (1/2)^7 = 531441/524288 = 1,0136$ . Denne afvigelse kaldes det pythagoræiske komma.

Den rene stemning blev brugt i renessancen, og har ligesom den pythagoræiske stemning en ret høj afvigelse. Mere om renstemning kan læses på [http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M26/M26-18\\_22Musik.pdf](http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M26/M26-18_22Musik.pdf) og lydeksempler, der på ganske klart viser, at renstemning ikke fungerer optimalt i praktisk, kan høres på <http://www.10klassikere.dk/danskttekst/opslagsord/stemning.html>

Grunden til at vi lander på et c igen i vores ovenstående eksempel med de 12 kvinter, er fordi klaveret er stemt veltempereret. Ligesvævende stemning inddeler, hvad der sikkert vil være nogle elever bekendt, oktaven i 12 halvtoner, og halvtone trinnet bliver den tolvte rod af 2, hvilket er ca. 1,0595. Herved bliver både kvart og kvint en lille smule falske, men ikke mere end, hvad der er acceptabelt for det gennemsnitlige øre. Fordelen er, at alle tonearter bliver ligestillet, hvilket er en enorm kompositionsmæssig fordel. Det vil i øvrigt her være oplagt i musik at gennemgå kvintcirklen, da eleven netop vil erfare, hvorfor denne fungerer.

Et interessant spørgsmål er nu om det overhovedet er smart, at man inddeler oktaven i tolv halvtoner. Lisa Lorentzen foreslår at man søger efter en anden inddeling, således at man kan nærme sig den rene kvint  $(3/2)$  bedre. (jf. <http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M28/M28-Lo.pdf> )

Hvis oktaven inddeles i  $n$  toner, kan man ved hjælp af kædebrøker finde de heltal der nærmer sig den rene kvint bedst. Til dette bruges bl.a. følgende sætning, som eleven kan vise ud fra lærerens vejledning og vink (citeret fra <http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M28/M28-Lo.pdf> ).

*La  $T > 0$  være et gitt tall med regulær kjedebrøk*

$$T = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

*La videre  $A_n / B_n$  være brøken du får ved å kutte kjedebrøken rett etter leddet  $b_n$ . Da er  $A_n / B_n$  den beste rasjonale tilnærmingen til  $T$  i den forstand at hvis  $P/Q$  er et annet rasjonalt tall med heltallig positiv teller og nevner og  $Q \leq B_n$ , så er feilen*

$$\left| T - \frac{A_n}{B_n} \right| < \left| T - \frac{P}{Q} \right|.$$

Man kan faktisk finne frem til at bl.a. en 31-toneskala teoretisk set ville klinge bedre end vores gängse 12-toneskala. Det er dog alligevel mere end tvivlsomt, at 12-toneskalaen bliver vippet af

pinden, da den bunder i hundredevis af års musikalsk udvikling. Dette åbner naturligvis op for en diskussion af, hvorvidt vores opfattelse af, hvad der lyder godt og dårligt, bunder i kulturelle konventioner eller fysiske fænomener.

### Variationsmuligheder

Det vil være muligt at gå nærmere ind på alternative stemningsmetoder eller skalaer, og arbejde med arabisk musik, hvor der opereres med kvarte toner, med Harry Partchs 43-toners skala eller med modal musik.

### Henvisninger (Høstdato for websites 27/3-2007)

- Dave Benson: *Music: A Mathematical Offering*, findes på nettet:  
<http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/music.pdf>

Meget grundig bog på engelsk, med størst vægt på de matematiske aspekter af musik. Her er særligt kapitel 4 og 5 interessant.

- Jens Carstensen: *Talteori*, Systime, 1993.

Indeholder et fint afsnit om kædebrøker.

- Jens Carstensen: *Talfølger og rækker*, Systime, 1997

Indeholder et afsnit om den harmoniske række.

- <http://www.10klassikere.dk/danskttekst/opslagsord/stemning.html>

Kort dansksproget artikel der bl.a. giver underholdende lydseksempler på forskellen mellem ren og veltempereret stemning.

- [http://da.wikipedia.org/wiki/Harmonisk\\_r%C3%A6kke](http://da.wikipedia.org/wiki/Harmonisk_r%C3%A6kke)

Dansk kortfattet artikel om harmoniske rækker.

- <http://users.bigpond.net.au/d.keenan/Music/EqualTemperedMusicalScales.htm>

Grundig engelsk artikel om at finde den optimale stemning.

- <http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M28/M28-Lo.pdf>

Lettilgængelig og interessant artikel på norsk fra Matilde om stemning og kædebrøker.

- [http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M26/M26-18\\_22Musik.pdf](http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M26/M26-18_22Musik.pdf)

Gennemgang på norsk af teorien bag pythagoræisk stemning, ren stemning og ligesvævende temperatur.