

Anvendelse af det gyldne snit og Fibonaccital i nyere kunstmusik.

Formålet med dette projekt er at få eleven til at hvorvidt matematiske formler og begreber kan virke som forlæg for musik. Det gyldne snit t er et oplagt emne, men det er også et emne der er blevet meget misbrugt i historien. Der lægges derfor vægt på at eleven demonstrerer kildekritik og forsøger at gå i dybden med, hvad der struktur, og hvad der er tilfældighed.

Eleven skal sætte sig ind i den matematiske kontekst (Euklids konstruktion af *ekstrem og middelforhold*) og være i stand til at forstå sammenhængen med Fibonaccirækken F_n .

Eleven skal desuden bruge denne vidne i forbindelse med en skitsering af en formanalyse af et musikalsk værk der er vedlagt som bilag. Eleven skal sætte sig ind i den historiske kontekst af værket og medtage denne i sin analyse.

Faglige forudsætninger, matematik

Mat B

Faglige forudsætninger, musik.

Mus A

Faglige mål, matematik.

- At opnå et kendskab til matematikken bag det gyldne snit.
- At opdage sammenhængen mellem det gyldne snit og Fibonaccital.
- At opnå en større forståelse for rækker og konvergens af rækker.

Faglige mål, musik.

- At styrkes i en formanalyse af et værk.
- At diskutere hvorvidt matematik kan bruges som forlæg for musik.

Eksempler på problemformuleringer

Matematik

- Del et liniestykke i ekstrem og middelforhold ved brug af passer og lineal. (hermed menes at eleven har et minimum af kendskab til geometrisk algebra, forstår fremgangsmåden og er i stand til at vise at den virker. Læreren kan eventuelt kræve at egentlig konstruktion med passer og lineal skal vedlægges den endelige opgave som bilag).

Et liniestykke har længden a . Vi deler liniestykket op og får to mindre stykker. Vi vælger ikke at dele præcis på midten og får derfor et stort stykke (med længden b) og et mindre stykke (der så har længden $a-b$). Vi kræver nu at forholdet mellem hele stykket og det store er det samme som forholdet mellem det store og det lille:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Vi isolerer a og deler med b^2 :

$$a^2 - ba - b^2 = 0 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0.$$

Vi sætter $x = \frac{a}{b}$ og løser andengradsligningen. Den positive løsning $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kalder vi det *gyldne snit*. (bemærk at $\phi^2 = \phi + 1$ og $\phi^{-1} = \phi - 1$). Den negative løsning $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kaldes ϕ' . Nogle steder i matematikken er det gyldne snit $\tau = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = -\phi' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Fibonaccifølgen er defineret ved $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ og $F_1 = F_2 = 1$. Dvs.: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... etc.

- Vis $F_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}}$ (Binets formel).

(her kan inddrages induktion, idet man med fordel kan bevise lemmaet $\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$).

- vis at $\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \phi$ for $n \rightarrow \infty$.

Musik

Giv en kortfattet analyse af første sats i Beethovens femte symfoni. Kan der findes gyldne snit eller Fibonaccital her? Hvis ja, argumenter for om dette er bevidst eller ubevidst. Alternativt kan eleven få udleveret første sats af Bartóks *Musik for strygere, slagtøj og celesta*.

Redegør for Joseph Schillingers system og argumenter for hvordan Fibonaccital bruges her. Dette kan fx ske i forbindelse med en kort analyse af George Gershwins *Porgy og Bess*, eller Glen Millers *Måneskinsserenade*.

En analyse af et klassisk værk vil typisk kunne bestå af overvejelser i forhold til:

Genre og instrumenter

Hvilken slags musik er det. Hvilken instrumentering har vi at gøre med?

Melodi/tema

En undersøgelse af vigtige motiver og fraser, der går igen igennem satsen.

Hvilken karakter har stykket?

Satsopbygning:

Polyfoni/homofoni - Fugerende elementer

Form

ABA-form, ritornel-form, bueform, rondo, variationsform, sonateform, etc.

Harmonik/tonalitet:

Funktionsharmonik/atonalitet.

Klang

Instrumenteringen kan give en bestemt klang.

Rytmik/metrik

Fast $\frac{3}{4}$ eller $\frac{4}{4}$ rytme eller fri rytme.

Perspektivering.

Hvilken sammenhæng indgår musikken i? I forhold til samfundet, eller i forhold til komponistens udvikling.

Bartok: Musik for strygere, slagtøj og celesta.

Bartok studerede folkemusikken fra Østeuropa intenst. Derfor vil det være oplagt at bede eleven lokalisere harmoniske motiver eller fraser med folkemusikalsk præg i satsen, ligesom rytmikken i satsen bør ses i dette perspektiv.

I stykket vil det ligeledes være interessant at analysere den kvintskridtsekvens, der bærer værket, og sætte denne i forhold til stykkets form og dynamik.

Det er særligt i forbindelse med en form-analyse at fibonacci-tallene og det gyldne snit bør bringes på banen. Værket er 89 takter, og har et kæmpemæssigt klimaks i takt 55, hvor man nærmest kan finde en spejlingsakse gennem stykket, der deler det gyldent i 55 og 34. Percussioninstrumenterne sætter ind i takt 34 etc.

Det er naturligvis også interessant at lade eleven give et bud på, hvorvidt disse fænomener er tilfældige eller planlagte formskabende elementer. Er der eksempelvis konkrete vidnesbyrd på at Bartok har beskæftiget sig med fibonacci-tallene?

Se <http://solomonsmusic.net/diss7.htm> for en detaljeret analyse.

Variationsmuligheder

Opgaven her er altså primært tænkt som en musikanalyserende opgave, hvori matematik indgår som en nødvendig del af en dækkende form-analyse.

Variationer af projektet kunne være at se på andre værker (se liste over andre komponister, der har arbejdet med det gyldne snit nederst), ligesom man også ville kunne gå dybere ind i matematikken ved bl.a. at kigge på sætninger om konvergens af rækker.

Henvisninger (høstdato for links 27/3):

- E. Lendvai: **Duality and Synthesis in the Music of Bela Bartók** p. 174-193 in *Module, Proportion, Symmetry, Rhythm* G Kepes (editor), George Brazille, 1966.

Kendt og meget omdiskuteret bog om Bartoks brug af Fibonacci-tal.

- Mario Livio, *Det Gyldne Snit*, Nyt teknisk forlag, 2006.

En ikke-matematisk bog om det gyldne snit. Vægten er lagt på det historiske. Er karakteristisk ved en meget kritisk holdning til brugen af det gyldne snit.

- Jesper Frandsen, *De(t)gyldne snit og Fibonaccital*, Systime, 2004.

Gymnasieegnet bog på dansk.

- www.matilde.mathematics.dk/arkiv/index.htm

Matilde nummer 26 og 28 der begge indeholder artikler om sammenhænge mellem musik og matematik.

- <http://solomonsmusic.net/diss7.htm>

Grundig analyse af *Musik for strygere, slagtøj og celesta*, der diskuterer hvorvidt fibonaccital er blevet brugt i kompositionsarbejdet med værket.

- www.schillingersystem.com

Andre komponister/stykker, der kan analyseres gennem brug af Fibonacci-tal/gyldne snit:

Debussy: *La Mer* (http://en.wikipedia.org/wiki/Debussy#Mathematical_structuring)

Mozart: ([http://links.jstor.org/sici?sici=0025-570X\(199510\)68%3A4%3C275%3ATGSATP%3E2.0.CO%3B2-E](http://links.jstor.org/sici?sici=0025-570X(199510)68%3A4%3C275%3ATGSATP%3E2.0.CO%3B2-E))

Per Nørregaard: *Canon for orgel* (<http://www.pernoergaard.dk/da/strukturer/gyldne/gyldne04.html>)

J S Bach: *The Art of Fugue* (Hugo Norden in *Fibonacci Quarterly* vol 2 (1964) pages 219-222)

Erik Satie ([http://links.jstor.org/sici?sici=0027-4224\(199605\)77%3A2%3C242%3AESAGSA%3E2.0.CO%3B2-M](http://links.jstor.org/sici?sici=0027-4224(199605)77%3A2%3C242%3AESAGSA%3E2.0.CO%3B2-M))