Lidt om ikke-euklidisk geometri

Kjeld Bagger Laursen

October 11, 2005

Abstract. Her giver vi en kort introduktion til ikke-euklidisk geometri, primært baseret på (og henvisende til) Brannan-Esplen-Gray

0.1. For at forstå. hvad der ligger i ikke-euklidisk geometri sætter vi scenen med hjælp fra Euklids *Elementer*. Dette værk er måske matematikkens mest indflydelsesrige skrift overhovedet, bla ved så overbevisende at illustrere en aksiomatisk tilgang til faget, men også gennem forbindelserne til menneskets forestillinger om den fysiske verden omkring os.

Men allerførst lidt om aksiomatiske systemer generelt. Et aksiomatisk system indeholder *primitiver* (udefinerede objekter) og *aksiomer*. Aksiomerne indeholder udsagn om de primitive; disse udsagn tildeles ikke en egentlig sandhedsværdi. Hos Euklid er primitiverne 'punkt' eller 'linie' - men bedre eksempler ville være termer, der ikke umiddelbart påkalder sig en fortolkning. Et eksempel på et aksiom kunne være 'størrelser som er lige store med den samme, er indbyrdes lige store'. Ved hjælp af slutningsregler udleder man *teoremer,* ud fra aksiomerne og tidligere udledte teoremer, om primitiverne. Man kan også, via *definitioner*, simplificere tingene i denne teoriudviklingsproces.

En *fortolkning* af den udviklede teori får man ved at tildele primitiverne, aksiomerne og de definerede størrelser en mening. Dermed får aksiomerne og teoremerne en sandhedsværdi, 'sand' eller 'falsk'. Hvis aksiomerne er sande, bliver teoremerne sande, og vi har fået en *model* for aksiomsystemet. Hvis et aksiomsystem har en model, kan det ikke indeholde nogen selvmodsigelser, thi fra sande udsagn kan man ikke, gennem korrekt anvendte slutningsregler, udlede falske udsagn. Et system med en model er altså *konsistent*.

Der er selvfølgelig ikke generelt noget til hinder for at et aksiomatisk system kan have mere end én model. Hvis to sådanne modeller er 'strukturelt ens', siges de at være *isomorfe*. Og hvis alle modeller er isomorfe er systemet *kategorisk*.

I mange, mange år var euklidisk geometri noget man så at sige opfattede som kategorisk modelleret af den fysiske verden vi lever i. Men i løbet af 1800-tallet røg den forestilling sig en tur. Denne udvikling rører ikke ved det faktum at euklidisk geometri er et godt eksempel på et aksiomatisk system - og at ikke-euklidisk geometri kan anskues som eksempler på andre aksiomsystemer, opstillet som varianter af Euklids oprindelige.

0.2. Euklid. Som I kan se i Jesper Lützens bog, s 23, er Euklids primitiver punkter og linier, men skellet mellem primitive og definitioner er ikke helt skarpt. Der indføres et 'mellem'-begreb og et 'ret-linie' begreb og også cirklen defineres. De postulater som vi normalt opfatter som de euklidiske aksiomer er så

- mellem to punkter kan trækkes én ret linie
- et liniestykke kan forlænges til en ret linie
- givet et punkt og en radius, kan en cirkel tegnes
- alle rette vinkler er lige store
- hvis en ret linie skærer to rette linier og de indvendige vinkler er mindre end to rette, vil de to rette linier mødes på denne samme side

Det er dette sidste vi kalder parallelpostulatet. Det kan også formuleres sådan: Givet et punkt uden for en given ret linie, så findes netop én ret linie gennem punktet der ikke skærer den først givne linie.

Når parallelpostulatet har fået så meget opmærksomhed igennem tiderne er det vel fordi det - ligesom de andre - opfattedes som et udsagn om den virkelige verden, og som sådant ikke er særlig indlysende. Mange har følt at det burde udelades - og specielt at det burde kunne udledes som et teorem fra de øvrige fire. Men alle forsøg på det mislykkedes og i løbet af 1800-tallet blev det klart hvorfor: Parallelpostulatet er uafhængigt af de øvrige. Flere matematikere lavede modeller for geometrier der opfyldte de fire første aksiomer og også det femtes negation.

0.3. Det ikke-euklidiske parallelpostulat. Dette postulat kan vi formulere sådan: Givet en linie og et punkt uden for denne går der gennem punktet mindst to linier som ikke skærer den først givne linie. (Hvis du studser over denne 'negation' af parallelpostulatet, fordi man jo godt kan forestille sig at der slet ikke er nogen linier der ikke skærer, er det helt ok: der findes også sådanne geometrier. En konkret udgave kan man tænke på ved at lave en geometri hvis linier er storcirkler på en kugleflade. Her vil alle linier skære hinanden. For at få de fire første postulater opfyldt skal man identificere antipodale (modstående) punkter med hinanden.)

I slutningen af 1820erne studerede den russiske matematiker Lobachevskii (1792-1856) og den ungarske Bolyai (1802-1860) uafhængigt af hinanden systemer hvor de fire første postulater og dette ikke-euklidiske var opfyldt. Efter sigende var også Gauss nået frem til noget tilsvarende, men han publicerede ikke noget om det. Den første egentlige model blev lavet i 1868 af Beltrami. Disse første 'opfindelser' var ret kontroversielle, og det tog tid og yderligere arbejde, bla. af Riemann, at vinde den matematiske offentligheds accept.

Den simpleste model er beskrevet af Henri Poincaré (1854-1912); her giver jeg en overvejende kvalitativ introduktion til den. Brannan et al.s 'Geometry' har meget mere, og en meget mere kvantitativ tilgang.

Modellens 'univers', den tilgrundliggende punktnængde, er den åbne enhedscirkelskive. Geometriens 'punkter' er denne åbne skives punkter. Dens linier er cirkelbuer i skiven, men kun dem der skærer enhedsskivens periferi under en ret vinkel. Geometriens 'skæring' er sædvanlig skæring mellem de netop indførte linier, cirkelbuerne. Nedenstående figur er fra AMS Notices, sept. 2005 (AMS har rettighederne til billedet)

Mere er der ikke! Og dog: vi har fx ikke sagt noget om cirkler (i denne geometri) endnu. Så det egentlige arbejde starter nu: vi skal godtgøre at der er defineret en geometri, altså at de fire første samt det ikke-euklidiske postulat er opfyldt. Det sidste er nemt at få et indtryk af, via skitser. Dem vil jeg lave i forelæsningen - og

I kan genlave dem derhjemme, hhv se dem udført i Brannan. I det hele taget bliver præsentationen så visuel i karakter, at almindelige tekstnoter ikke slår til. I må være der og se med!

0.4. En smagsprøve på en kvantitativ tilgang til Poincaré skiven. I dette afsnit beviser vi at Euklids første postulat er opfyldt af geometrien på Poincaré skiven.

Betragt den åbne enhedsskive $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Vi betragter i beviser og på tegninger selvfølgelig også cirklen $\mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, men dens punkter er ikke med i Poincaré skiven.

En *ikke-euklidisk linie* er en cirkelbue (evt. en ret linie) i $\mathcal{D}$ der skærer $\mathcal{C}$ under ret vinkel. Tegn selv et par eksempler! Bemærk specielt at de rette linier der kan blive tale om her er diametre i $\mathcal{D}$. Tegn også et par eksempler på cirkelbuer og rette linier der *ikke* definerer en ikke-euklidisk linie.

To ikke-euklidiske linier i $\mathcal{D}$ er *parallelle* hvis deres eneste fælles punkter ligger på $\mathcal{C}$ og *ultra-parallelle* hvis de ikke har punkter fælles i $\mathcal{C}$ eller $\mathcal{D}$.

Som sagt, den egenskab ved modellen vi vil bevise her er følgende, som er helt analog med Euklids første postulat:

Sætning 1 Givet to forskellige punkter A og B i $\mathcal{D}$, så findes der præcis én ikke-euklidisk linie gennem A og B.

Beviset trækker på viden om *inversioner:* En inversion (i enhedscirklen) er en afbildning af planen (fraregnet begyndelsespunktet - altså den givne cirkels centrum - vi siger også at planen er *punkteret* i $(0, 0)$) ind i denne punkterede plan, der afbilder punktet $(x, y) \neq (0,)$ i punktet $(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. Et punkt (x, y) afbildes altså i et andet punkt (x_1, y_1) placeret på linien, bestemt af (x, y) og begyndelsepunktet, med den egenskab at $\|(x, y)\| \, \|(x_1, y_1)\| = 1$.

Tilsvarende kan vi definere inversion i en vilkårlig given cirkel som den just beskrevne transformation, hvor vi opfatter cirklens centrum som begyndelsespunkt og sætter cirkelradius til at være 1.

De næste påstande er enten instruktive og overkommelige opgaver, eller beviset vil blive givet i forelæsningerne.

Man kan ret let se (Opgave 5) at

- inversion afbilder en ret linie der ikke passerer igennem $(0, 0)$ over i en cirkel som er punkteret i $(0, 0)$, og
- inversion afbilder en linie punkteret i $(0, 0)$ over i sig selv.

Derefter indser man (Opgave 6) at

- inversion afbilder en cirkel der ikke passerer igennem $(0, 0)$ på en cirkel, og

- inversion afbilder en cirkel der er punkteret i $(0,0)$ på en ret linie som ikke indeholder $(0,0)$.

Disse observationer kan udnyttes i Poincaré skiven sådan:

Betragt en vilkårlig ikke-euklidisk linie i $\mathcal{D}$ som ikke passerer igennem centrum af $\mathcal{D}$. Denne ikke-euklidiske linie er en del af en cirkel. Betragt dernæst inversionen i denne cirkel. Der gælder at denne inversion sender ikke-euklidiske linier i $\mathcal{D}$ over i ikke-euklidiske linier i $\mathcal{D}$. Denne påstand skal fortolkes: En ikke-euklidisk linie er en del af en cirkel elle ren ret linie. Hvis denne cirkel eller linie inverteres (i den først fastholdte cirkel) og man betragter billedets fællesmængde med $\mathcal{D}$, så er denne mængde en ikke-euklidisk linie.

At mængden er en ikke-euklidisk linie indebærer bla at den skærer $\mathcal{C}$ under ret vinkel. Dette er en konsekvens af:

Lemma 1 Inversion er vinkelbevarende: hvis to kurver skærer hinanden, defineres vinklen mellem dem som vinklen mellem deres tangenter i skæringspunktet. Billedkurverne skærer hinanden under samme vinkel som de oprindelige kurver.

Skitse af et bevis (det fuldstændige bevis kan findes i Brannan, omkring s. 209): Læseren bedes gribe en blyant og et stykke papir og følge disse skridt ved at tegne - og tænke. Vi laver et repræsentativt tilfælde:

1. Tegn en cirkel, der skal inverteres i. Vælg et punkt uden for cirklen og tegn to rette linier gennem punktet; de repræsenterer en vinkel.

2. Opsøg det punkt P på en af linierne der er nærmest ved cirklens centrum O. Invertér P og få punktet Q. Linien inverteres nu i den punkterede cirkel med diameter OQ. Overbevis dig om det!

3. Gør det samme for den anden linie.

4. De to resulterende cirkler skærer hinanden i O (bortset fra at de begge er punkteret i O!) samt i eet andet punkt S.

5. De to cirklers tangenter i O og i S danner samme vinkler.

6. De to tangenter gennem O er parallelle med de to oprindelige linier, så de skærer hinanden under samme vinkel som de to oprindelige gør.

7. De to tangenter i S er jo billedmængdernes skæringspunkts tangenter.

8. Voila! Lemmaet er bevist.

Lemma 2 En ikke-euklidisk linie afbildes i en ikke-euklidisk linie.

Bevisgang: Hvis vi kan vise at en inversion i en ikke-euklidisk linie afbilder $\mathcal{C}$ over på $\mathcal{C}$ er vi færdige: thi hvis det er tilfældet så vil en cirkel/diameter, der afbildes over i en cirkel/diameter jo bevare vinklerne mellem de oprindelige ikke-euklidiske linier og $\mathcal{C}$ Og hvis $\mathcal{C}$ afbildes på sig selv er billedmængdens vinkel med $\mathcal{C}$ altså også ret.

Tegn $\mathcal{C}$ og den inverterende cirkel. Hvis $\mathcal{C}$ skærer den inverterende cirkel i A og B, så afbildes disse to punkter i sig selv og $\mathcal{C}$ afbildes i en cirkel gennem A og B der også skærer den inverterende cirkel under ret vinkel. Men det gør kun $\mathcal{C}$! Heraf følger iøvrigt også at $\mathcal{D}$ afbildes på $\mathcal{D}$, men det overlader jeg til den særligt interesserede læser.

Lemma 3 Lad $A \neq (0,0)$ være et punkt i $\mathcal{D}$. Så findes en ikke-euklidisk linie i $\mathcal{D}$ med hensyn til hvis inversion A afbildes i $(0,0)$.

[Et eftervisningsbevis: Invertér A i $\mathcal{C}$. Resultatet kalder vi R. Tegn den ikke-euklidiske linie der har centrum i R (og altså skærer $\mathcal{C}$ under rette vinkler.) Tjek så hvor inversion i denne nye cirkel sender A hen. Det bliver $(0,0)$!]

Her er et eksempel på hvad Lemma 3 er godt for.

Sætning 2 Lad A være et punkt i $\mathcal{D}$. Så går der uendelig mange ikke-euklidiske linier gennem A.

Bevisgang: Hvis $A = (0,0)$, giver alle diametrene i $\mathcal{D}$ svaret. Hvis $A \neq (0,0)$, kan vi finde en ikke-euklidisk linie så inversion heri fører A over i $(0,0)$. Gennem $(0,0)$ går der uendelig mange ikke-euklidiske linier. Invertér dem tilbage til udgangssituationen, og vi har fået fat i uendelig mange ikke-euklidiske linier gennem A.

Og her er bevisgangen for Sætning 1: igennem to forskellige punkter A og B i $\mathcal{D}$ findes der præcis én ikke-euklidisk linie: Invertér som ovenfor, så A ryger over i $(0,0)$. Betegn billedet af B under denne transformation med B'. Gennem $(0,0)$ og B' går der præcis én ikke-euklidisk linie, nemlig en diameter. Transformer denne diameter tilbage. Dette er eksistens-delen af argumentet, men entydigheden er også klaret: en vilkårlig ikke-euklidisk linie gennem både A og B vil inverteres over i diameteren fra før. Forklar!

Hermed har vi vist at Euklids første postulat er opfyldt, Men bemærk at vi nu kun har behandlet dette første postulat. Det er ikke svært at se at postulat nr. 2 (om liniestykkes forlængelse til ret linie) og postulat nr. 4 (at rette vinkler alle er lige store) holder. Men eksistens af cirkler kræver en del yderligere overvejelser.

0.5. Lidt om cirkler. For at give læseren en vis fornemmelse af hvordan man kan udvikle teorien videre, og dermed også håndtere fx ikke-euklidiske cirkler kvalitativt skal vi have et afstandsbegreb. Men allerførst er det instruktivt at se hvor let man vha komplekse tal kan håndtere inversion.

Først ser vi på inversion i en vilkårlig givet cirkel C, centreret i α og med radius r. Vi opfatter α som et komplekst tal, fx $\alpha = a + ib$. Hvis vi betegner inversionsafbildningen med t får vi at for et vilkårligt $z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ er

$$t(z) = \frac{r^2}{\overline{z - \alpha}} + \alpha.$$

Dette indses ved først at observere at da vi betragter en inversion i en cirkel med centrum i α er $t(z) - \alpha$ et multiplum af $z - \alpha$, så der gælder

$$t(z) - \alpha = |t(z) - \alpha| \frac{z - \alpha}{|z - \alpha|},$$

og dernæst notere at der jo for en inversion gælder at

$$|t(z) - \alpha| \, |z - \alpha| = r^2.$$

Kombinerer vi disse to udsagn får vi at

$$t(z) - \alpha = |t(z) - \alpha| \frac{z - \alpha}{|z - \alpha|} = \frac{r^2}{|z - \alpha|^2}(z - \alpha) = \frac{r^2}{(z - \alpha)\overline{(z - \alpha)}}(z - \alpha) = \frac{r^2}{\overline{z - \alpha}},$$

hvilket direkte giver den påståede formel for $t(z)$.

Hvis den cirkel der inverteres i ovenikøbet er en ikke-euklidisk linie får dette udtryk endda en simplere form. Vi forudsætter nu altså at vi har Poincaré skiven $\mathcal{D}$ realiseret som enhedsskiven i den komplekse plan $\mathbb{C}$ og at en ikke-euklidisk linie ℓ ligger på den cirkel C med radius r og centrum i α vi så på ovenfor. Bemærk at $|\alpha| > 1$ og at en radius i C kan tegnes som tangent til $\mathcal{C}$ i skæringspunktet mellem C og $\mathcal{C}$. Denne radius danner med radius i $\mathcal{C}$ i samme skæringspunkt en ret vinkel. Med α som hypotenuse får vi altså dannet en retvinklet trekant med sidelængderne $1, r$ og $|\alpha|$ Hvis vi noterer os at Pythagoras giver at $1 + r^2 = |\alpha|^2$ og indfører det i udtrykket for inversion overnfor, får vi for dette specialtilfælde at inversion ρ i en ikke-euklidisk linie ℓ er givet ved

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \frac{r^2}{\overline{z - \alpha}} + \alpha = \frac{r^2 + \alpha(\overline{z - \alpha})}{\overline{z - \alpha}} \\ &= \frac{\alpha \overline{z} - 1}{\overline{z} - \overline{\alpha}} \end{aligned}$$

Vi slynger nu simpelthen formlen for afstandsfunktionen i $\mathcal{D}$ ud. Den er

$$d(z_1, z_2) = \operatorname{arctanh}\left(\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|\right)$$

for vilkårlige punkter $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$. I Brannan er der en nærmere forklaring på denne metriks egenskaber og form.

Vores sigte med dette er ganske begrænset. Vi vil blot identificere formen af enhver ikke-euklidisk cirkel i $\mathcal{D}$. Rimeligvis er sådan en figur (med radius r og (ikke-euklidisk) centrum i z_0) defineret som punktængden

$$\Gamma = \{z \in \mathcal{D} : d(z, z_0) = r\}.$$

Vi opsøger den inversion der afbilder z_0 i 0, Poincaré skivens centrum, altså den afbildning $\rho : z \curvearrowright \frac{\alpha\overline{z}-1}{\overline{z}-\overline{\alpha}}$ for hvilken $z_0 \curvearrowright 0$. Men det betyder jo at $\alpha\overline{z}_0 = 1$, altså at $\alpha = z_0 / |z_0|^2$ Heraf får vi at

$$\rho(z) = \frac{z_0\overline{z} - |z_0|^2}{|z_0|^2\,\overline{z} - \overline{z_0}}$$

For at identificere $\rho(\Gamma)$ er det nu relevant at udregne $d(\rho(z), 0)$ for et vilkårligt $z \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} d(\rho(z), 0) &= d(\frac{z_0\overline{z} - |z_0|^2}{|z_0|^2\,\overline{z} - \overline{z_0}}, 0) = \operatorname{arctanh}(\left|\frac{\frac{z_0\overline{z}-|z_0|^2}{|z_0|^2\overline{z}-\overline{z_0}} - 0}{1-0}\right|) \\ &= \operatorname{arctanh}(\left|\frac{z_0\overline{z} - |z_0|^2}{|z_0|^2\,\overline{z} - \overline{z_0}}\right|) = \operatorname{arctanh}(\left|\frac{z - z_0}{z_0\overline{z} - 1}\right|), \end{aligned}$$

og sammenligne det med $d(z, z_0) = \operatorname{arctanh}(\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}z_0}\right|)$. Vi konstaterer at punkterne i $\rho(\Gamma)$ har samme afstand fra 0 som punkterne i Γ har fra z_0, og slutter heraf at $\rho(\Gamma) = \{z \in \mathcal{D} : d(z, 0) = r\}$. Men $d(z, 0) = r = \operatorname{arctanh}(|z|)$, så $\rho(\Gamma) = \{z \in \mathcal{D} : d(z, 0) = r\} = \{z \in \mathcal{D} : |z| = \tanh r\}$. Det er jo en ganske almindelig euklidisk cirkel!

Da anvendelse af inversionen ρ en gang til bringer os tilbage fra denne ganske almindelige euklidiske cirkel $\rho(\Gamma)$ til Γ, og da en inversion afbilder en cirkel der ikke passerer igennem den inverterende cirkels centrum i en cirkel slutter vi at Γ er en cirkel. De ikke-euklidiske cirkler er altså som figur betragtet almindelige cirkler.

Lidt forskel er der dog: Centrum for den ikke-euklidiske cirkel er nemlig ikke det samme punkt som den euklidiske cirkels centrum. Se opgave 11.

0.6. Opgaver. **Opgave 1** Tegn eksempler på ikke-euklidiske linier i $\mathcal{D}$, og tegn også 'almindelige linier og cirkelbuer der ikke giver ikke-euklidiske linier i $\mathcal{D}$.

Opgave 2 Lad en linie ℓ og et punkt P uden for linien være givet. Angiv alle linier gennem P som er parallelle med ℓ.

Opgave 3 Her er fire ikke-euklidiske linier

$\ell_1 = \{(x, y) : x = y\} \cap \mathcal{D}$

$\ell_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$

$\ell_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$

$\ell_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0\} \cap \mathcal{D}$

Tegn dem - og afgør hvilke der er parallelle og hvilke der er ultra-parallelle.

Opgave 4 Angiv tre linier ℓ_1, ℓ_2 og ℓ_3 med den egenskab at de to første og de to sidste er parallelle, men den første og sidste er ikke. Sammenlign med den euklidiske situation.

Opgave 5 Teksten til denne opgave står i noterne.

Opgave 6 Teksten til denne opgave står i noterne.

Opgave 7 Projektforslag: Inversion (cf. Brannan, s. 266 ff). Projektet kan fx demonstrere hvordan cirkler ser ud i denne geometri.

Opgave 8 Projektforslag: En simpel model for en geometri 'uden parallelle linier', jf. ovenstående hentydning: En konkret udgave kan man tænke på ved at lave en geometri hvis linier er storcirkler på en kugleflade. Her vil alle linier skære hinanden. For at få de fire første postulater opfyldt skal man identificere antipodale (modstående) punkter med hinanden.)

Opgave 9 Projektforslag: Hilberts aksiomatisering af geometri.

Opgave 10 Projektforslag: Vis at det ikke-euklidiske parallelpostulat gælder i Poincaré skivens geometri.

Opgave 11 Lad C være en ikke-euklidisk cirkel i $\mathcal{D}$ med ikke-euklidisk radius r. og ikke-euklidisk centrum i z_0 Find ud af hvor i C z_0 ligger.

0.7. Evalueringen af deltagernes forståelse. Hver arbejdsgruppe laver en animations-baseret (dynamisk - dvs. Maple eller PowerPoint, ell. tilsvarende) præsentation der introducerer Poincaré skiven og giver løsningen på ovenstående opgave 1, 2, 3, 4.

0.8. Referencer. Brannan, Esplen, Gray, Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1999

Francis, Axiomatic Systems for Geometry, set på http://new.math.uiuc.edu/math402/supplements/postulates.pdf den 7. september 2005

Kristensen, Erik, Ikke-euklidisk geometri, Gads forlag, København 1975