Forskningsgruppen 'Topologi'

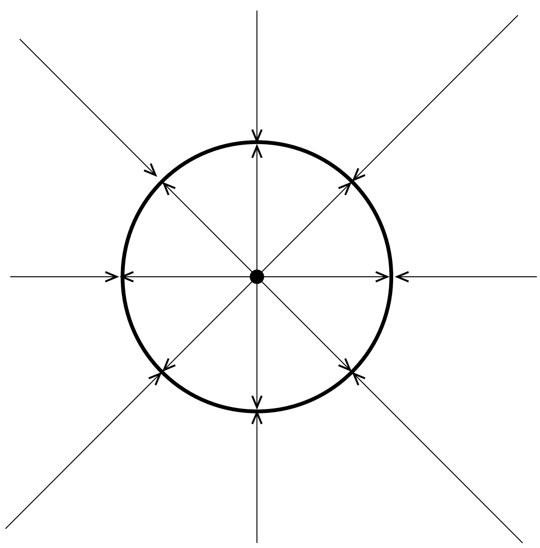
Tarje Bargheer

I Forskningsgruppen i topologi har vi pt. fire fastansatte forskere: Jesper Grodal, Jesper Michael Møller, Erik Kjær Pedersen og Nathalie Wahl. Derudover kommer der til efteråret to midlertidige ansættelser i form af post-docs'ne, Craig Westerland og Radu Stancu. På adressen `http://www.math.ku.dk/english/research/top/` kan man læse om aktiviteter gruppen foretager sig.

Forskningen i gruppen centrerer sig om algebraisk topologi – også bare kaldet topologi. Kort fortalt er algebraisk topologi en variant af geometri, hvor man altså kigger på topologisk rum – som fx. kurver og flader.

Starten på algebraisk topologi er dog at introducerer en meget bredmasket ækvivalensrelation på disse rum.

For en algebraisk topolog vil det for eksempel ikke være noget problem at deformere $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ over i enhedscirklen S^1, fx. illustreret ved kontinuert at mase punkterne langs pilene indikeret på følgende tegning:



Fordi vi er i stand til at lave sådan en deformation, vil S^1 og $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ betragtes som værende ens!

På denne måde siger det sig selv at algebraiske topologers beregninger ikke længere ligner dem man ser i fx. differentialgeometri – introduceret på `Geom1`. I eksemplet ovenfor er tangentrummet til de to ens rum hhv. 2-dimensionelt og 1-dimensionelt. Tangentvektorer til et punkt bliver derfor forholdsvist irrelevant for en algebraisk topolog.

Beregningsmetoder der i stedet vinder frem i algebraisk topologi kommer fra algebra. Ud fra de topologiske rum konstruerer man grupper – som man kender dem fra `Alg1` – grupperne beskriver aspekter af det topologiske rum man står med.

Hvis vi deformerer det ene rum over i det andet sådan at rummene stadig er ens, giver dette blot anledning til en isomorfi af de tilhørende grupper. Man kalder disse grupper for invarianter hørende til vores topologiske rum, og

Det klassiske eksempel – der har været et tema til en del bredt orienterede foredrag dette efterår – er fundamentalgruppen $\pi_1(X)$ hørende til rummet X. Elementerne i $\pi_1(X)$ er stier i X der starter og slutter i samme punkt. Komposition af to stier er givet ved at gå først langs den ene sti i den kompositionen, og dernæst den næste. $\pi_1(X)$ viser sig at være en af disse invariante grupper hørende til X.

Algebraisk topologi er et stærkt værktøj til at skelne rum. Ved at forsøge sig med direkte beregninger, vil man opdage at det er urimeligt omstændigt at vise at $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ og $\mathbb{R}^2$ er to forskellige topologiske rum [4]. I algebraisk topologi er dette en barneleg; hvis man har invariante grupper hørende til de to rum, der ikke er

[4] her tænkt som ikke-homeomorfe. Altså en mere finmasket ækvivalens af rum end ovenfor, relateret til hvad man ser i geometri

isomorfe, har de to rum ikke en chance for at være ens – heller ikke med en finere ækvivalens af rum end algebraiske topologers grovmaskede. Fundamentalgruppen viser sig at gøre arbejdet for en i ovenstående tilfælde.

En måske mere imponerende feature ved algebraisk topologi er at samspillet mellem algebra og topologi også går den anden vej; vidste man det ikke på forhånd, havde man nok ikke gættet at den yderst algebraisk klingende sætning

Sætning 1 *Enhver undergruppe af en fri gruppe er en fri gruppe*

har sit simpleste – og oprindelige – bevis inden for algebraisk topologi. Fundamentalgruppen er igen her nøglen.

Forskningsgruppen i topologi er i kraftig vækst. Tre af de fire nuværende ansatte er blevet ansat inden for det seneste halvandet år. Som før nævnt suppleres dette op med endnu to post-docs til sommer. Disse udvidelser realiseres primært igennem en del ekstern finansiering; fx. et betydeligt EU-legat (European Young Investigator prisen tildelt til Jesper Grodal); derudover er gruppen blevet tildelt en del nationale legater.

Kurser der er direkte relevante for forskningen der foregår i topologi-gruppen er:

1. Det grundlæggende `Topologi (Top)` (Blok 2B), hvor det generelle begreb 'topologisk rum' bliver slået fast, og rammen for algebraisk topologi dermed fastlagt.
2. Kurset `Algebraisk Topologi (AlgTop)` (Blok 1B), der introducerer algebraisk topologi, bygger videre på `Top` – og fastlægger mange af de fundamentale værktøjer man arbejder med i algebraisk topologi.
3. Næste semester afholdes herudover det videregående kursus `Introduction to String Topology` (Blok 2A), der bygger oven på `AlgTop`.

Kurser der er stærkt relaterede til algebraisk topologi kan deles op i to blokke:

1. Kommutativ- og homologisk-algebra – altså algebrakurser der er stærke værktøjer inden for algebraisk topologi (næste semester primært manifesteret i kandidat-kurserne `HomAlg` (Blok 1A) og `KomAlg` (Blok 1C), samt naturligvis bachelor-kurset `Alg2` (Blok1B))
2. Geometri. I denne gren af matematikken arbejder man med den vigtige klasse af topologiske rum, kaldet mangfoldigheder. Som nævnt ovenfor er synspunktet her en smule anderledes end kernen i algebraisk topologi; det er generelt enormt sundt at kunne se tingene fra flere sider. Næste semester kan man fx. forsøge sig med `GeomLie` (Blok 1A) og `GeomRie` (Blok 1C).

En gratis måde at få snust en smule til algebraisk topologi er ved simpelthen at møde op mandag kl. 15.15 i et auditorium annonceret på `http://www.math.ku.dk/kalender/`. Her vil der almindeligvis være et seminar i algebraisk topologi. Alle er yderst velkomne; seminarerne vil typisk beskrive noget nutidig forskning.