Spingrupper og spinrepræsentationer

Søren Ladegaard Kristensen

Indledning

Som en del af kandidatuddannelsen i matematik forlanges det, at den studerende udfører visse formidlingsaktiviteter. Denne artikel er en sådan formidlingsaktivitet. Da jeg i skrivende stund er ved at færdiggøre mit speciale i matematik, er det nærliggende at prøve at beskrive nogle af ideerne deri.

Der gives i denne artikel således en kort introduktion til nogle centrale begreber inden for et område af differentialgeometrien kaldet *spingeometri*. Som navnet antyder, har disse matematiske ideer oprindeligt fundet anvendelse i kvantemekanikken, men har med tiden udviklet sig til et selvstændigt matematisk forskningsfelt med flere forskellige grænseflader til andre områder af matematikken.

Mere præcist forsøges det at give en delvis præsentation af *spingruppen* og *spinrepræsentationen*. Delvis i den forstand, at præsentationen retter sig mod læsere med få matematiske kundskaber, dvs. det forudsættes blot, at læseren er bekendt med lineær algebra og elementær gruppe- og ringteori. Dette betyder naturligt nok, at en del af historien må simplificeres eller udelades. Et dybere kendskab til spingeometri kan opnås ved at læse mere i fx. [3].

Inden vi begiver os ud i den mere formelle behandling af spingruppen og spinrepræsentationen, vil jeg skrive lidt om, hvad mit speciale handler om, og hvad der har ledt mig til at skrive om netop dette. Specialet handler om *harmonisk analyse* på en særlig differentialgeometrisk struktur, mere præcist det *hyperbolske rum*, hvortil spingruppen har en særlig relation. Interessen for differentialgeometri opstod, da jeg ved lidt af et tilfælde tog kurset 3GE (på den gamle studieordning, nu omtrent svarende til Geom 1 og delvist Geom 2). Her studeredes kurver og flader i rummet, som er elementære eksempler på *differentiable mangfoldigheder*. Disse er abstrakte topologiske rum, som løst sagt ligner det Euklidiske, når man kigger tæt nok på (under en topologisk optik). Tanken om, at man "indefra" kan beskrive højdimensionale rum med finurlige krumninger og andre egenskaber finder jeg ret fascinerende. Et efter min mening utroligt dybsindigt eksempel herpå er den almene relativitetsteori, der beskriver fysiske fænomener (tyngdekraft) som en rent geometrisk egenskab (krumning) ved rummet, eller rettere *rumtiden*. Mit bachelorprojekt kom således til at handle om mangfoldigheder, og hvordan man kan tænke på dem som delmængder af det Euklidiske rum (Whitneys indlejringssætning). I mit første kandidatprojekt ønskede jeg at lære mere om mangfoldigheder, mere præcist *Liegrupper* og såkaldte *homogene rum* af disse. Det tidligere nævnte hyperbolske rum er et homogent rum af spingruppen (som er en Liegruppe). Mit andet kandidatprojekt kunne efter reglerne ikke igen handle om differentialgeometri, så jeg søgte efter et godt emne inden for funktionalanalysen. Jeg fik ideen at kombinere studiet af homogene rum med analyse gennem et gammelt nummer af FAMØS, hvori Professor Henrik Schlichtkrull skrev en artikel om sin forskning i harmonisk analyse. Ideen i harmonisk analyse er meget kort fortalt at beskrive en funktion på en givet mængde som en sum (i en eller anden forstand) af mere simple funktioner eller at opsplitte et vektorrum af funktioner i simplere underrum. Er mængden den reelle akse, kan en funktion med passende egenskaber, som bekendt for de fleste, fremstilles som en sum af periodiske funktioner kaldet *Fourierrækken*. Tingene bliver naturligt nok væsentligt mere komplicerede, når mængden erstattes med en mere abstrakt mængde. Et centralt resultat i harmonisk analyse er dekomponeringen af Hilbertrummet af kvadratisk integrable funktioner på en givet mængde. Et teorem, der beskriver en sådan dekomponering kaldes et *Plancherelteorem*. Formålet med mit andet kandidatprojekt var at bevise et Plancherelteorem for funktioner på Abelske lokalkompakte topologiske grupper, og således var specialeemnet lagt i rammer: harmonisk analyse på homogene rum (af en slags). Min vejleder, Henrik Schlichtkrull, tilføjede ideen om at studere det hyperbolske rum og prøve at formulere et Plancherelteorem for såkaldte *spinorer*, der kan opfattes som en type funktioner defineret på spingruppen.

Cliffordalgebraen

En mulig vej til en definition af spingruppen er via *Cliffordalgebraen*. Lad os først indføre begrebet *algebra*. Lad $\mathbb{K}$ være et legeme og A et endeligdimensionalt vektorrum over $\mathbb{K}$. Vi siger at A er en $\mathbb{K}$-algebra, hvis der findes en associativ multiplikation $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto xy$, som opfylder de distributive love $x(y+z) = xy+xz$ og $(x + y)z = xz + yz$ samt $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$, hvor $x, y, z \in A$ og $\lambda \in \mathbb{K}$. En lineær afbildning $f : A \to B$ mellem $\mathbb{K}$-algebraer A og B siges at være en algebrahomomorfi, hvis $f(xy) = f(x)f(y)$ for alle $x, y \in A$. Vi skriver $A \cong B$ og siger at A og B er isomorfe, hvis der findes en bijektiv algebrahomomorfi mellem dem. Findes der i en algebra et neutralt element for multiplikationen, kaldes dette en enhed. Bemærk at en algebra med enhed specielt er en ring.

Vi vil ikke konstruere Cliffordalgebraen i detaljer, men blot nævne dens vigtigste egenskaber. En mere grundig fremstilling findes i [2], kap.3. Cliffordalgebraen er nært relateret til *kvadratiske former* defineret som følger.

Lad V være et endeligdimensionalt vektorrum over legemet $\mathbb{K}$. Ved en kvadratisk form på V forstås en afbildning $q : V \to \mathbb{K}$ som opfylder at $q(av) = a^2 q(v)$ for $a \in \mathbb{K}$ og $v \in V$ samt at afbildningen $V \times V \to \mathbb{K}$ givet ved

$$(v, w) \mapsto \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$$

er lineær i hver variabel.

Cliffordalgebraen $\mathrm{C}\ell(V, q)$ er kort fortalt en $\mathbb{K}$-algebra med enhed, der er genereret af V, sådan at der gælder $v^2 = -q(v) \cdot 1$ for alle $v \in V$. Specielt er V indeholdt som underrum i $\mathrm{C}\ell(V, q)$. Cliffordalgebraen er karakteriseret ved følgende universelle egenskab:

Sætning 1 *Lad A være en $\mathbb{K}$-algebra med enhed 1_A og lad $f : V \to A$ være en lineær afbildning der opfylder $f(v)^2 = -q(v) \cdot 1_A$. Da findes en entydig algebrahomomorfi $\widetilde{f} : \mathrm{C}\ell(V, q) \to A$ sådan at $f = \widetilde{f} \circ \imath$. Endvidere er Cliffordalgebraen pånær isomorfi den eneste algebra med denne egenskab.*

Dette bevises i [2], Prop.3.14.

Spingruppen

Et element x i en algebra A med enhed kaldes invertibelt, såfremt der findes $x^{-1} \in A$ sådan at $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. De invertible elementer i Cliffordalgebraen udgør en multiplikativ gruppe kaldet $\mathrm{C}\ell^\times(V, q)$. Hvis $v \in V$ og $q(v) \neq 0$ gælder $v \in \mathrm{C}\ell^\times(V, q)$, idet da $v^{-1} = -\frac{v}{q(v)}$. Dette leder os til følgende definition af spingruppen:

Definition 2 Spingruppen $\mathrm{Spin}(V, q)$ er undergruppen af gruppen $\mathrm{C}\ell^\times(V, q)$ bestående af elementer på formen $v_1 \cdots v_k$, hvor $v_i \in V$, $q(v_i) = \pm 1$ og k er lige. Her sættes det "tomme" produkt ($k = 0$) til 1.

For nemheds skyld vil vi nu fokusere specifikt på Cliffordalgebraen $\mathbb{C}\ell(n) := C\ell(\mathbb{C}^n, q_n)$, hvor q_n er den kvadratiske form på $\mathbb{C}^n$ givet ved

$$q_n(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \cdots + z_n^2 \quad , \quad (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

Ud fra Cliffordalgebraens universelle egenskab kan det vises, at hvis q_1 og q_2 er kvadratiske former på $\mathbb{C}^n$, så er $C\ell(\mathbb{C}^n, q_1) \cong C\ell(\mathbb{C}^n, q_2)$. I denne forstand ligger der altså ingen væsentlig begrænsning i kun at betragte tilfældet $q = q_n$. Den tilhørende spingruppe $\mathrm{Spin}(\mathbb{C}^n, q_n)$ noteres $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$.

Spinrepræsentationen

Cliffordalgebraerne $\mathbb{C}\ell(n)$ kan klassificeres på simpel vis som matrixalgebraer. Lad $M_n(\mathbb{K})$ betegne algebraen af $n \times n$-matricer med matrixelementer i legemet $\mathbb{K}$. Da gælder:

Sætning 3

$$\mathbb{C}\ell(n) \cong \begin{cases} M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C}) & n \text{ ulige} \\ M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C}) & n \text{ lige} \end{cases}$$

hvor $[\cdot]$ *betegner heltalsdelen.*

For uddybende behandling af klassifikationen af Cliffordalgebraer, se [3], kap.1,§4.

En måde at studere grupper på er at undersøge, hvordan de virker på et vektorrum. Dette er meget kort fortalt ideen i *repræsentationsteori*. Spingruppen er interessant af flere grunde, dels fordi den har en fundamental virkning, dvs. en repræsentation, på rummet af *spinorer*, som præciseret i det følgende. Vi definerer først nogle elementære repræsentationsteoretiske begreber.

Definition 4 Lad G være en gruppe og S et vektorrum. Da er en repræsentation af G på S en gruppehomomorfi $\rho : G \to \mathrm{GL}(S)$. Tilsvarende kan vi definere en repræsentation af en algebra A som en algebrahomomorfi $\rho : A \to \mathrm{End}(S)$. Et underrum $S' \subseteq S$ siges at være invariant under G (hhv. A) såfremt $\rho(x)S' \subseteq S'$ for alle $x \in G$ (hhv. A). En repræsentation siges at være irreducibel, hvis $\{0\}$ og S er de eneste invariante underrum. To repræsentationer ρ_1 og ρ_2 på S kaldes ækvivalente, hvis der findes en isomorfi $\Phi : S \to S$ sådan at $\rho_1 \circ \Phi = \Phi \circ \rho_2$.

Et element i $M_n(\mathbb{K})$ definerer på oplagt vis en endomorfi af $\mathbb{K}^n$ idet et basisvalg for $\mathbb{K}^n$ er foretaget. Dette giver anledning til den såkaldte *standardrepræsentation* ρ af $M_n(\mathbb{K})$ på $\mathbb{K}^n$. Der gælder at standardrepræsentationen af matrixalgebraen $M_n(\mathbb{K})$ pånær ækvivalens er den eneste irreducible repræsentation af $M_n(\mathbb{K})$ på $\mathbb{K}^n$. Matrixalgebraen $M_n(\mathbb{K}) \oplus M_n(\mathbb{K})$ har pånær ækvivalens netop to irreducible repræsentationer, nemlig $\rho_1(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = \rho(\varphi_1)$ og $\rho_2(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = \rho(\varphi_2)$, hvor $\varphi_1, \varphi_2 \in M_n(\mathbb{K})$ (se [3], kap.1,§5, Thm.5.6). Antag i det følgende at $S = \mathbb{C}^{2^{[\frac{n}{2}]}}$. Af ovenstående følger nu, at når n er lige har $\mathbb{C}\ell(n) \cong M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C})$ pånær ækvivalens netop én irreducibel repræsentation på S. Tilsvarende når n er ulige har $\mathbb{C}\ell(n) \cong M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^{[\frac{n}{2}]}}(\mathbb{C})$ pånær ækvivalens netop to irreducible repræsentationer på S. Vi definerer nu spinrepræsentationen:

Definition 5 Spinrepæsentationen $\sigma : \mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(S)$ er restriktionen af en vilkårlig irreducibel repræsentation $\rho : \mathbb{C}\ell(n) \to \mathrm{End}(S)$ til $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}\ell(n)$. Vektorerne i S kaldes spinorer.

Ovenstående overvejelser om antallet af irreducible repræsentationer af $\mathbb{C}\ell(n)$ kan nu anvendes til at vise, at definitionen af spinrepræsentationen er uafhængig af, hvilken irreducibel repræsentation $\rho : \mathbb{C}\ell(n) \to \mathrm{End}(S)$ vi vælger. Beviset er for omfangsrigt for denne artikel, så der henvises til [2], Prop.5.15.

Den specielle ortogonale gruppes forbindelse til $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$

Betragt nu repræsentationen $\pi : \mathbb{C}\ell^\times(n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}\ell(n))$ givet ved $\pi(x)y = xyx^{-1}$, hvor $x \in \mathbb{C}\ell^\times(n)$ og $y \in \mathbb{C}\ell(n)$. Det kan vises, at restriktionen af π til $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}\ell^\times(n)$ giver en homomorfi

$$\pi' : \mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$$

(se [3], s.14-19), hvor $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ er den specielle ortogonale gruppe bestående af orienteringsbevarende lineære transformationer af $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}\ell(n)$ som bevarer den kvadratiske form q. En kæde af grupper G_i og gruppehomomorfier π_i på formen

$$\cdots G_{i-1} \overset{\pi_{i-1}}{\to} G_i \overset{\pi_i}{\to} G_{i+1} \cdots$$

siges at være eksakt, hvis $\ker \pi_i = G_i$ og $\mathrm{Im}\pi_i = G_{i+1}$ for alle i. Med $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gælder at følgende kæde er eksakt:

$$0 \to \{\pm 1, \pm i\} \overset{\imath}{\to} \mathrm{Spin}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{\pi'} \mathrm{SO}(n, \mathbb{C}) \to 0$$

hvor $\imath$ er indlejringen af $\{\pm 1, \pm i\}$ i $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ (se [2], Prop. 4.8).

For læsere med kendskab til topologi og Liegruppeteori kan det afslutningsvis bemærkes, at spingruppen har Liegruppestruktur og homomorfien π' er en Liegruppehomomorfi. Med udgangspunkt i ovenstående eksakte følge kan det vises, at $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$ er en overlejringsgruppe for $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$. Sidstnævnte er en sammenhængende gruppe og har således en enkeltsammenhængende overlejringsgruppe ([4], Thm.3.25), som netop er spingruppen. Dette kan anvendes til en enklere, men mere abstrakt, karakterisering af spingruppen.

Litteratur

[1] Greub, W.H.: *"Multilinear Algebra"*, Springer Verlag 1967

[2] Kristensen, S.L: *"L^2 harmonic Analysis for Spinors on Hyperbolic Space"*, Speciale i matematik. Forefindes (snart) i biblioteket

[3] Lawson, H.B. og Michelsohn M.L.: *"Spin Geometry"*, Princeton University Press 1989

[4] Warner, F.W.: *"Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups"*, Scott, Foresman and Company 1971