

Divisibilitetsregler

– Et eventyr udi obskureteten

Sebastian Paaske Tørholm

Vi kender det allesammen – der er bare tidspunkter, hvor man har et tal, og ønsker at se om et vist andet tal går op i det. Dette giver ofte anledning til at danne huskeregler for hvornår visse tal er delelige med andre, og det er præcis en af disse regler jeg i denne artikel vil udforske. Jeg vil vove den påstand at enhver matematikstuderende kender¹ huskereglen om at et tal er kongruent med sin tværsom modulo 3 og 9, eller at et tal er kongruent med sin alternerende tværsom – summen af cifrene i tallet med alternerende fortegn – modulo 11. Udi de mere obskure af divisibilitetsreglerne ligger følgende regel for 7: Lad n være et positivt heltal med følgende decimalrepræsentation

$$n = c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 c_0,$$

hvor vi lader k være ulige.^{2,3} Vi opdeler da denne repræsentation i grupper af to cifre,

$$n = \underbrace{c_k c_{k-1}}_{a_{\frac{k-1}{2}}} \dots \underbrace{c_3 c_2}_{a_1} \underbrace{c_1 c_0}_{a_0},$$

hvor vi definerer $a_i = c_{2i+1} c_{2i} \bmod 7$, altså den principale rest af $c_{2i+1} c_{2i}$ ved division med 7. Disse opskrives da i en tabel med 3 søjler,

¹Eller burde kende, som det vel bør lyde.

²Jeg tillader mig den lidt løse notation med at skrive $\sum_{i=0}^k 10^i c_i$ som $c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1 c_0$. Dette vil forekomme gennemgående i denne artikel, og idet der ej vil forekomme multiplikation burde denne notation ej volde problemer.

³Hvor vi også tillader at $c_k = 0$.

a_2	a_1	a_0
a_5	a_4	a_3
\vdots	\vdots	\vdots
b_2	b_1	b_0

hvor

$$b_j = \left(\sum_{i \equiv j \pmod{3}} a_i \right) \pmod{7}.$$

Danner vi da et tocifret tal af de to tal til venstre og trækker det fra det vi kan danne med de to til højre, fås et tal der er kongruent med det oprindelige modulo 7. Altså, for at sige det mere præcist, $b_1b_0 - b_2b_1 \equiv n \pmod{7}$.

Før at fremme forståelsen kommer hér et eksempel inden bevist. Lad os betragte $n = 8514616566195676053559397313$.

Første trin består i at opdele dette tal i grupper af to cifre og udregne principale rester for at gøre livet lettere for os.

$$\underbrace{85}_1 \underbrace{14}_0 \underbrace{61}_5 \underbrace{65}_2 \underbrace{66}_3 \underbrace{19}_5 \underbrace{56}_0 \underbrace{76}_6 \underbrace{05}_5 \underbrace{35}_0 \underbrace{59}_3 \underbrace{39}_4 \underbrace{73}_3 \underbrace{13}_6$$

Disse opstilles da i tabel

4	3	6
5	0	3
5	0	6
5	2	3
	1	0
19	6	18
5	6	4

Vi får da at

$$8514616566195676053559397313 \equiv 64 - 56 = 8 \equiv 1 \pmod{7}.$$

For at spare unødigt forvirring udelades en mere formel opskrivning og sætningen bevises blot som den er.

Bevis. Vi observerer at $100^3 \equiv 1 \pmod{7}$.

Bruger vi notationen fra formuleringen fra før fås da

$$n = c_k c_{k-1} \cdot 100^{k/2} + \dots + c_3 c_2 \cdot 100 + c_1 c_0 \quad (1)$$

$$\equiv 100^2(c_5 c_4 + c_{11} c_{10} + \dots) + 100(c_3 c_2 + c_9 c_8 + \dots) \quad (2)$$

$$+ (c_1 c_0 + c_7 c_6 + \dots) \quad (3)$$

$$\equiv 4(c_5 c_4 + c_{11} c_{10} + \dots) + 2(c_3 c_2 + c_9 c_8 + \dots) \quad (4)$$

$$+ (c_1 c_0 + c_7 c_6 + \dots) \quad (5)$$

$$\equiv 4(a_2 + a_5 + \dots) + 2(a_1 + a_4 + \dots) + (a_0 + a_3 + \dots) \quad (6)$$

$$\equiv 4b_2 + 2b_1 + b_0 \equiv -10b_2 + 9b_1 + b_0 \quad (7)$$

$$= (10b_1 + b_0) - (10b_2 + b_1) = b_1 b_0 - b_2 b_1 \pmod{7} \quad (8)$$

som ønsket. □