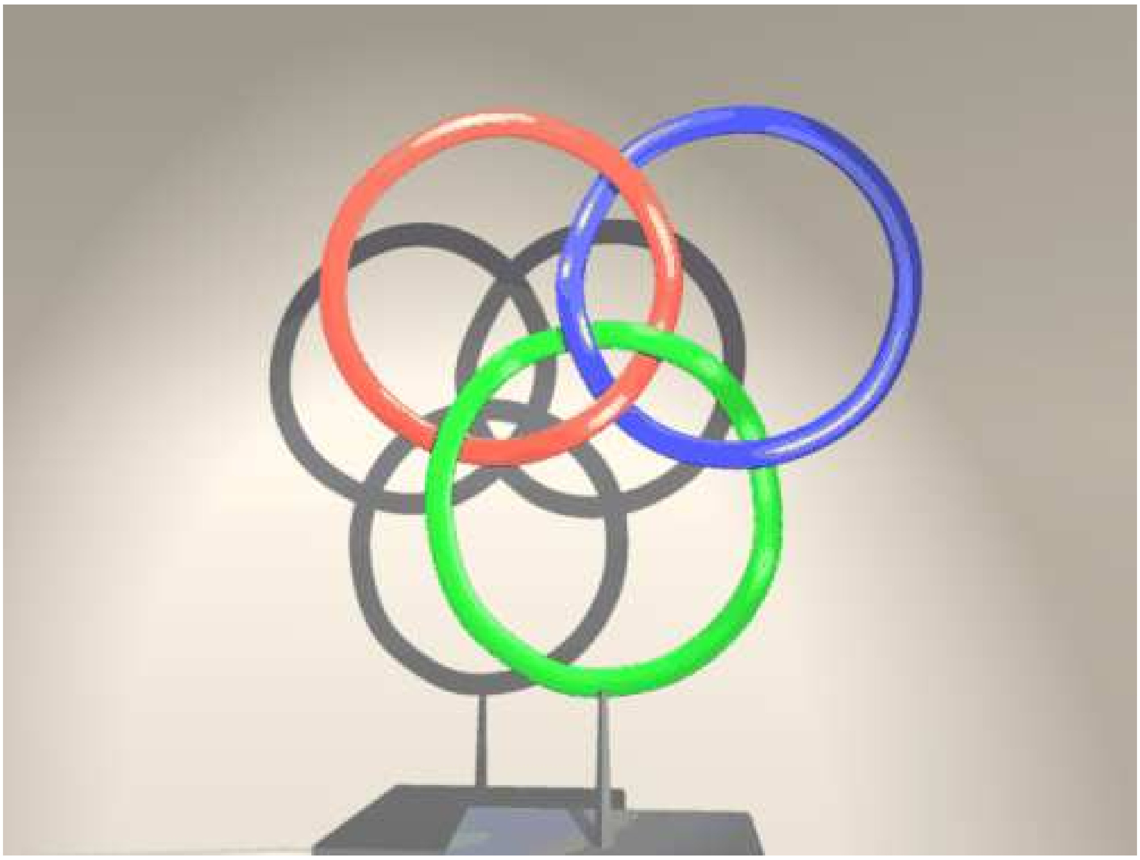
FAMØS

Fagblad for Aktuar, Matematik, -Økonomi og Statistik

12. årgang, nr. 1, september 1998



FAMØS 12.1; september 1998.
Fagblad for Aktuar-, Matematik-, Økonomi- og Statistikstuderende ved Københavns Universitet.

Redaktionsgruppe:

Henrik Christian Grove (ansvh.)
Anders Bo Nielsen

Deadline for næste nummer:
Fredag den 20. november 1998

Indlæg modtages gerne og kan sendes til `famos@math.ku.dk` (meget gerne skrevet i LaTeX eller LaTeX 2ε), eller afleveres på Matematisk Afdelings sekretariat i E 103.

FAMØS er et internt fagblad.

Fagbladet FAMØS
c/o Institut for matematiske fag
Matematisk Afdeling
Universitetsparken 5
2100 København Ø

World Wide Web adresse:
`http://www.math.ku.dk/famos/`

Tryk: HCØ Tryk

Oplag: 700 stk.

ISSN 1395-2145

Indhold

Leder

Velkommen til endnu en ny årgang af FAMØS, specielt velkommen til alle de nystartede. I år er der en helt ny gruppe studerende der fortjener en ekstra velkomst, nemlig den første årgang er studerende på den nye matematik-linie.

Vores ansvarshavende redaktør Rasmus, har taget orlov, for at tjene sit land[1], og derfor har Henrik Chr. Grove midlertidigt overtaget posten som ansvarshavende redaktør.

Der er nu kommet møbler og en *god* tavle i vores studenterrum i S01, og med lidt held får vi også snart en kaffeklub/-ordning til at fungere.

Hvis du føler dit liv kun drejer sig om kurser, eksaminer og karakterer, var det måske en ide, at engagere dig i dit studium. En af de måder vi her på redaktionen kan anbefale allervarmest er at blive medredaktør på FAMØS! Vi kunne nemt bruge et antal studerende der har tid så lidt som 4 (*fire*) dage om året til at redigere FAMØS. FAMØS er et ganske populært blad, som folk ser frem til næste nummer af, men med den størrelse redaktionen har er det et åbent spørgsmål, hvor længe vi kan holde den standard. Du behøver ikke være specielt god til hverken LaTeX eller matematik[2]. Den smule LaTeX du har brug for, skal vi nok lære dig, og der skal helst også være faglige artikler der kan forstås af førsteårsstuderende, og det sikres nu engang bedst ved at det er førsteårsstuderende der skriver dem. Desuden er vi også glade for artikler der ikke handler om matematik!

Her til sidst må det være må sin plads at sige tillykke til ZFC[3], som i foråret fejede alle konkurrenter af banen og vandt turneringen.

[1] Aftjene sin værnepligt
[2] Som slet ikke behøver være dit hovedfag
[3] Matematikkernes fodboldhold, ikke aksiomsystemet, som holdet er opkaldt efter

3. års og 2. dels seminar — eller hvad der skete i lederrummet

Morten G. Pedersen

Tirsdag før semesterstart tog vi ca. 50 glade og frejdige matematikstuderende til Kaspers hjemby - Gurre - for dels at nyde hinandens samvær og dels at få lidt info om 3. årskurser, 2. delen, erhvervsarbejde, m.v. Alt dette foregik fra tirsdag til fredag i en udmærket spejderhytte med en tilhørende - skal vi sige interessant - toilethytte. Vi ankom omkring kl. $18^{\underline{00}}$, hvor arrangørgruppen var godt i gang med madlavningen. Efter indkvartering, lidt info fra René og den første øl var det at rygtet løb om toiletterne. De havde et „vakuumsystem“ og med velplacerede skilte, blev man høfligt men bestemt gjort opmærksom på at det var forbudt at smide bl.a. klædningsstykker og duelighedstegn i kummen „for så skal du holde dig!“

Efter maden festede vi lidt — og hen på natten gjorde jeg min først erfaring med lederrummet, da Katja inviterede mig ind og sove der. Hun kan dog ikke huske dette(!), men for at stoppe løbske rygter, skal det siges at jeg sov (alene) i den seng, der senere skulle blive Anders' — men som var ganske tom på dette tidspunkt.

Onsdag var der efter morgenmaden foredrag om 2. del og sideløbende dermed 3. årskurser. Jeg hørte først Henrik Schlichtkrull tale om Harmonisk Analyse, hvorefter jeg hørte om diverse 3. årskurser. Jeg læser nu kun 3. årskurser, men jeg må sige, at jeg faktisk er mest glad for at jeg hørte Schlichtkrull, da det gav lidt mere ide om hvad det hele skal føre til. Det skyldes dog sikkert også, at jeg var ret sikker på hvilke Mat 3 kurser, jeg ville vælge. Alligevel er det dog rart lige at se underviseren og få afklaret de sidste detaljer, man kunne være i tvivl om. Og hvis man står og vakler mellem to kurser, er jeg sikker på det er en stor hjælp at have hørt om emnerne fra forelæserne. Derfor må jeg sige, at det er lidt ærgeligt, at foredragene lå sideløbende, da jeg synes, man fik noget ud af begge forløb. (Men af rent praktiske grunde - tid f.eks. - kan det vist ikke gøres anderledes...)

Onsdag aften bød på lidt mere fest og hyggeligt samvær — bl.a. i det før omtalte lederrum, men denne godte må i have til gode (lidt endnu). Desuden blev der vist nok spillet mørke-fodbold, men der var jeg gået i seng (min egen).

Torsdag var der igen en masse gode foredrag. Først lidt om at være ph.d. studerende og udlandsrejser, og herefter noget om erhvervsmuligheder: Gymnasielærer og job i det private erhvervsliv - her i et computer-/finansfirma (Simcorp). Undervejs talte Kasper vist også om at skrive speciale, og der blev nævnt noget om fagprojekter og andre formelle krav på 2. del, *men intet om bachelorprojektet*, hvilket jeg savnede, men desværre først kom i tanke om et par dage senere. Jeg var især glad for foredragene om erhvervsmuligheder (herunder ph.d.) Det gav et godt indtryk af dels havd man kan bruge matematikken til (selv om de fleste vel har en ide om netop disse tre muligheder...). Men endnu bedre var det at høre hvad de forskellige jobs egentlig indebærer af plusser og minusser . Det var 3 gode foredrag! Personligt var jeg også glad for foredragene om udlandsophold, men jeg er selvfølgelig også i fuld gang med at færdiggøre ansøgningen om at komme afsted, så... Endelig rundedes seancen af med lidt reklame for erhvervsbacheloruddannelsen hvorefter Kjeld Bagger sluttede med at tale om pædagogikum. Denne diskussion druknede dog lidt i mere eller mindre underlige specialtilfælde, og da det virkede meget usikkert hvad der skal ske med pædagogikum i fremtiden og hvad der bliver besluttet om dit og dat, synes jeg ikke jeg fik det store ud af dette foredrag. I stedet burde man nok have nøjes med at give noget mere overordnet info om strukturen og de grundlæggende regler, og så må folk selv undersøge m.h.t. specialtilfældene.

Torsdag var der så fest - for alvor. Lækker mad, lange borde, oppyntning og en leg (?!). Legen var noget med at man ikke måtte tale sandt, men i stedet for at finde på gode løgnehistorier, så begyndte folk bare at negere deres udsagn (Eks: „Så vil jeg *ikke* sige skål“, „Maden smager rigtig *dårligt* osv.). Dette var mildest talt røvsygt efter ca. 10 min. så jeg tror jeg taler for mange, når jeg siger: „Tak Esben!“ Esben rejste sig nemlig på et tidspunkt for højlydt at proklamere: „To plus to *er* fire“. Og så kunne man (heldigvis) så småt begynde at tale nogenlunde normalt sammen igen. Legen var sikkert godt tænkt, men den virkede ligesom ikke rigtigt i praksis...

Nå, men onsdag aften befinder Malene, David og undertegnede sig pludseligt (!) i Rævens seng. Og her falder så en sjov lille ordudveksling. Malene ligger med sine ben et sted i mellem Davids og spørger så „Er det her dit lår?“. Hvortil David svarer - ærlig som han jo er: „Nej!“ Om denne episode er den egentlige grund til, at David vågnede i lederrummet fredag morgen skal jeg ikke kunne sige...

Men for lige at samle op, vil jeg sige, at jeg er rigtig glad for at jeg tog med. Dels havde vi det jo sjovt (...), men vi fik nogle gode foredrag (især torsdag) og så er det en fin anledning til at snakke med nogen fra de andre årgange, som man ellers ikke lige kender. Faktisk var det for mig en masse nye ansigter, som jeg end ikke vidste læste matematik. Men efter sådan en tur føler man sig lidt mere „med“, blandt de andre matematikere, også selvom det højst bliver til et kort nik en gang imellem.

Så mange tak for en god tur til alle jer der var med (specielt til arrangørerne) og til jer andre er der jo en chance igen til næste år.

FAMØS har talt med en nystartende på teologi, om hvordan det er at læse teologi, og hvilken opfattelse en teolog har af matematikere. Målet er at lave en række artikler, med studerende fra forskellige fag, med det formål at give læserne en bedre ide om hvordan det er at læse på andre fag, og hvilken opfattelse andre har af matematikere.

Og nu til noget helt andet...

- Om at studere teologi

Linda Ishøj Knudsen interviewet af Anders Nielsen

Teologistudiet er et studie og ikke ligesom at gå i kirke. Teologi er et studie i videnskab ligesom de andre studier på Københavns Universitet. Man læser lektier ligesom på andre studier. Og pensum bliver diskuteret. Men den store forskel er nok, at teologistudiet er et studie i ens egen person og personlighed. De første 3 år af studiet er egentligt ikke særligt præget af gud og religion. De første 3 år har man næsten kun redskabsfag, som man skal bruge for at kunne studere kristendommen senere på studiet. På første år har vi 5 fag. Etik & religionsfilosofi, almen filosofi, bibelvidenskab, græsk og latin. Til næste år går vi i gang med hebræisk. Vi samler også en masse psykologi op undervejs. Der bliver egentligt ikke brugt så meget tid på gud og den slags. Men indirekte lærer vi meget om teologi. Man lærer om kristendommen ved at lære om en hel masse filosofiske emner og den slags. Det er ikke sådan man siger: "Så, nu skal vi lære om gud."Nej, jeg tror istedet for, at man skal opnå livsvisdom. Og det tror jeg, man kan få ved f.eks. at læse filosofi. Meget af kristendommen er egentligt en slags filosofi. Jeg vil sige, at vi også lærer om gud, når vi lærer om filosofi. Det handler nemlig om mennesker og menneskesyn. Udover at man forsøger at få noget livsvisdom, lærer vi jo også alle de konkrete ting.

På studiet er man egentligt ikke religiøse. Det er ikke noget med at vi går rundt og beder til gud eller taler om at søge frelse. Det kan godt være der er nogle, der tror på gud, men det er ikke noget der er dominerende på studiet. Det er ikke tro, der binder de studerende sammen. Det er snarere det, at man har fælles interesse i at diskutere det vi læser om. Man forsøger at gøre det videnskabeligt. Det er meget lidt religiøst, det vi foretager os. I frikvartererne kan man godt finde på at diskutere religion. Men det vil for det meste være på et filosofisk plan. Man kan også sige, vi bare diskuterer pensum ligesom man gør på alle andre studier. Jeg vil tro, der er 50 procent af de studerende, der tror systematisk på gud. Altså f.eks. sådan noget med at bede til gud. Der er naturligvis også ateister. De opfatter teologi som en videnskab der er interessant at læse om. Nogle af dem kan have ønsket at komme ind på religionsvidenskab, men har måske ikke kunnet komme ind. Teologien kan også bare opfattes som en chance for at læse om spændende emner som psykologi, filosofi, historie, antropologi og magtudøvelse.

Vores studietur var ikke meget anderledes end andre studieture. Der var en journalist med på vores studietur. Hun var også med på en studietur for nogle politter (økonomistuderende). Journalisten mente, at vores studietur var mere social end politternes. Hun sagde, at der havde været en bedre og mere fælles stemning på vores tur. Politternes skulle have været ret uhæmmet druk. Jeg synes vores studietur var god. Folk var ikke kedelige, som man kunne have frygtet. Folk drak en masse øl og havde det skægt. Der var selvfølgelig også nogen, der virkelig kom hinanden ved. Jeg kunne godt lide, at folk havde meget initiativ og lyst til at sætte sjove ting igang. Det mest religiøse vi lavede på studieturen var morgensang. Der var selvfølgelig også nogle faglige emner vi skulle diskutere. Vi havde et tema om skyld og soning. Vi skulle diskutere sådan noget som arvesynd og om at angre.

Inden jeg begyndte på studiet havde jeg forskellige fordomme om teologer. Jeg regnede med, at de var enten indremissionske og moraliserende eller vanvittigt kedelige. Men folk er ret normale her på studiet. Jeg kan godt lide, at der er en stor respekt for hinanden på studiet. Folk har utroligt mange holdninger og man diskuterer dem også. Men man har respekt for hinanden, selvom man har meget forskellige holdninger. Der er nogle få fundamentalister med holdninger lidt ligesom pastor Krarup.

Der er ikke nogen af de studerende, der er kommet direkte fra gymnasiet. De yngste er dem, der har været et par år ude at rejse. Dem tilhører jeg. Der er også en stor gruppe i slutningen af 20´erne. Mange har været ude i verden at rejse med rygsæk. Og så er der de rigtigt "voksne". Det er folk, der har haft et andet job i mange år, men som sent har besluttet, at de vil begynde at læse teologi.

Jeg tror ikke, der er nogen, der har valgt teologi ud fra sådan et rationelt synspunkt som, at betalingen er god eller arbejdsløsheden er lav. Istedet har man valgt det, fordi man har interessen. 50

Jeg mener, at en god præst er en person der har fred med sig selv, og har et stort menneskekundskab.

Måske tror jeg på gud. Jeg er bare ikke sikker på, at jeg tror på den gud, der står i bibelen. Men jeg har endnu ikke rigtigt taget stilling til det.

Jeg tror ikke man behøver at blive præst, bare fordi man har en uddannelse som teolog. Jeg har læst om at teologer ret ofte kan bruges i stedet for psykologer. Der er teologer, der bliver ansat i private virksomhder for at hjælpe til i svære situationer som fyringer og ansættelser. Men mange virksomheder er lidt nervøse for at ansætte en teolog, fordi det giver nogle aftryk på virksomheden. Mange folk er f.eks. også bange for at sige, de er religiøse. At være religiøs er for nogle folk lidt flovt. Jeg tror sagtens private virksomheder kan bruge en teolog. Jeg tror, at teologer har et stort menneskekendskab og en stor viden om psykologi i praksis. Vi har ikke nogen formel undervisning i psykologi, men jeg tror at de studerende lærer hinanden meget om det. Vi diskuterer meget vores egne menneskesyn. Det tror jeg, man får meget psykologisk indsigt af. Derudover er religion og filosofi en menneskekundskab.

Min ide om en matematiker er en klog person, der er skarpt tænkende. Jeg vil tro, at en matematiker kan være meget hurtig til at lave en konklusion ud fra det man ved. Men måske er de ikke opmærksomme nok på at få smådetaljerne med. Jeg tror, at en matematiker først drager en meget hurtig konklusion og først bagefter kigger sagen efter i sømmene for at forsøge at bevise sandheden. Først dér kommer der er et helhedssyn ind. Jeg tror ikke, at matematikere er overfladiske personer. Jeg tror faktisk matematikere og teologer forsøger det samme. Begge forsøger at finde forståelse for verdens helhed.

Der er sikkert mange grunde til at folk søger mod humanistiske uddannelser i denne tid. Jeg tror på, at historien gentager sig selv. I de kolde, hårde 80´ere var personligheden i 2. række og egoet i 1. række. Nu her op i mod tusindeårsskiftet begynder folk igen at interessere sig for humanistiske fag, fordi de vil fordybe sig og lære sig selv at kende.

Nyt fra Centralmatematisk Fagråd

Centralmatematisk fagråd er de matematikstuderendes[1] studenterorganisation her på instituttet. Vi har tre repræsentanter i matematisk studienævn, og har derigennem stor indflydelse på hvordan studiet ser ud.

Hvis du har et problem der vedrører studiet, så tager fagrådet det gerne op. Fagrådet kan kontaktes pr. e-post på `fagraad@math.ku.dk`, men den bedste måde, at få os i tale på er at møde op. De næste møder er:

- tirsdag den 20. oktober kl. $17^{\underline{10}}$ i S01
- torsdag den 3. december kl. $17^{\underline{10}}$ i S01.

Hold øje med opslagene som dukker op rundt omkring og i E-bygingen et par uger inden møderne.

Den 22. september holdt Centralmatematisk Fagråd sin årlige generalforsamling, hvor følgende poster blev besat:

Formand: Henrik Christian Grove, 2. delsstuderende og FAMØS-redaktør.
Næstformand: Stefan Lindhard Mabit, 3. årsstuderende, rus-vejleder og storesøster.
Kasserer: Simon Cort Graae, 2. delsstuderende og tidl. studievejleder.

[1] men også statistikernes, aktuarernes og mat-øk'ernes

Weyl-von Neumann-Berg-Sikonia sætningen

Nadia S. Larsen

I 1909 har H. Weyl vist, at en selvadjungeret operator bevarer sit spektrum under en kompakt perturbation, pånær eventuelle isolerede egenværdier med endelig multiplicitet (se [6]). J. von Neumann har i 1935 vist, at denne opførsel er den eneste mulige, idet to selvadjungerede operatorer der har samme spektrum pånær isolerede egenværdier med endelig multiplicitet er unitært ækvivalente op til en kompakt perturbation (se [4]). Resultatet blev senere udvidet til normale operatorer i uafhængigt arbejde af I. D. Berg ([1]) og W. Sikonia ([5]).

Vi viser følgende formulering af sætningen (se [3]):

. *Givet en normal operator T på et separabelt Hilbert rum $\mathcal{H}$ og givet $\varepsilon > 0$, der findes en diagonal operator D og en kompakt operator K således at $T = D + K$ og $\|K\| < \varepsilon$. Mere generelt, givet n kommuterende selvadjungerede operatorer $A_1, \ldots, A_n$, findes der diagonale selvadjungerede operatorer $D_1, \ldots, D_n$ og kompakte operatorer $K_1, \ldots, K_n$ således at $A_i = D_i + K_i$ og $\|K_i\| < \varepsilon$ for alle $1 \leq i \leq n$.*

Bevis. Vi kan antage, at $0 \leq A_i \leq I$ for alle $1 \leq i \leq n$, hvor I er identitetsoperatoren på $\mathcal{H}$. Dette kan f.eks. gøres ved at erstatte A_i med $\frac{1}{2\alpha_i}A_i + \frac{1}{2}I$, hvor $\|A_i\| = \alpha_i > 0$. Bemærk, at ε dernæst skal justeres på passende vis.

For hvert i, $1 \leq i \leq n$, betragt den spektrale projektion

$$E_k^{(i)} = E_{A_i}\Big(\bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}(\frac{2j-1}{2^{-k}}, \frac{2j}{2^{-k}}]\Big)$$

for $k \geq 1$. Da $A_1, \ldots, A_n$ er indbyrdes kommuterende, vil det samme gælde om $E_k^{(i)}$, for alle $k \geq 1$, $1 \leq i \leq n$. Det ses, at

$$A_i = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} E_k^{(i)}.$$

Vælg N i $\mathbb{N}$ således at $2^{-N} < \varepsilon$. Betragt nu den følgende tællelige familie af kommuterende projektioner:

$$\mathcal{E} = \{E_k^{(i)} \mid k \geq 1, 1 \leq i \leq n\}.$$

Vi sigter mod at konstruere en følge af projektioner i $\mathcal{K}$, underrummet af kompakte operatorer på vores Hilbert rum. Lad $\{x_1, x_2, \ldots,\}$ være en ortonormal basis for $\mathcal{H}$. For $k \geq N$ sæt:

$$\mathcal{L}_k = \text{span}\{\prod_{l=1}^{k} F_l^{(i)} x_j \mid 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq n, F_l^{(i)} \in \{E_l^{(i)}, I - E_l^{(i)}\}\}.$$

Da udgør $(\mathcal{L}_k)_k$ en voksende følge af endeligtdimensionale underrum af $\mathcal{H}$,og $\overline{\cup \mathcal{L}_k} = \mathcal{H}$. Hvis P_k betegner den ortogonale projektion på $\mathcal{L}_k$, så er $(P_k)_k$ en voksende følge af kompakte operatorer på $\mathcal{H}$, dvs $P_k \in \mathcal{K}$.

For $l \leq k$ og $1 \leq i \leq n$ er $E_l^{(i)} F_l^{(i)}$ enten lig med 0 eller $E_l^{(i)}$. Dette siger, at $\mathcal{L}_k$ er et invariant underrum for alle projektionerne $E_l^{(i)}$ (m.a.o. gælder der, at $E_l^{(i)}(\mathcal{L}_k) \subset \mathcal{L}_k$). Dette medfører umiddelbart, at P_k kommuterer med $E_l^{(i)}$ når $l \leq k$, $1 \leq i \leq n$.

For $1 \leq i \leq n$ sæt $D_l^{(i)} = E_l^{(i)}$ hvis $l \leq N$ og $D_l^{(i)} = E_l^{(i)}(I - P_l)$ hvis $l > N$. Vi bemærker, at alle $D_l^{(i)}$ er projektioner, idet $E_l^{(i)}$ og $I - P_l$ er kommuterende projektioner.

Der gælder følgende: enhver $D_l^{(i)}$ kommuterer med P_k for $k \geq N$ og med $D_m^{(j)}$ for $m \neq l$ og $1 \leq i, j \leq n$. For at bevise dette benytter vi os af det faktum, at $P_j P_h$ er lig med P_j hvis $P_j \leq P_h$ eller med P_h hvis denne projektion er den mindste af de to. Derfor har vi, at

$$
\begin{aligned}
D_l^{(i)} P_k &= \begin{cases} E_l^{(i)} P_k & \text{hvis } l \leq N \\ E_l^{(i)}(P_k - P_l P_k) & \text{hvis } l > N \end{cases} \\
&= \begin{cases} E_l^{(i)} P_k & \text{hvis } l \leq N \\ 0 & \text{hvis } l > k > N \\ E_l^{(i)}(P_k - P_l) & \text{hvis } k > l > N \end{cases} \\
&= \begin{cases} P_k E_l^{(i)} & \text{hvis } l \leq N \\ P_k(I - P_l) E_l^{(i)} & \text{hvis } l > N \end{cases}
\end{aligned}
$$

hvilket viser den første påstand om kommutativitet. For at bevise den anden kan man uden besvær beregne, at

$$
\begin{aligned}
D_l^{(i)} D_m^{(j)} &= \begin{cases} E_l^{(i)} E_m^{(j)} & \text{hvis } l, m \leq N \\ E_l^{(i)} E_m^{(j)}(I - P_m) & \text{hvis } m > N \geq l \\ E_l^{(i)}(I - P_l) E_m^{(j)} & \text{hvis } l > N \geq m \\ E_l^{(i)}(I - P_l - P_m + P_l P_m) E_m^{(j)} & \text{hvis } l, m > N \end{cases} \\
&= \begin{cases} E_m^{(j)} E_l^{(i)} & \text{hvis } l, m \leq N \\ E_m^{(j)}(I - P_m) E_l^{(i)} & \text{hvis } m > N \geq l \\ E_m^{(j)} E_l^{(i)}(I - P_l) & \text{hvis } l > N \geq m \\ E_l^{(i)}(I - P_l) E_m^{(j)} & \text{hvis } l \geq m > N \\ E_l^{(i)}(I - P_m) E_m^{(j)} & \text{hvis } m \geq l > N \end{cases} \\
&= D_m^{(j)} D_l^{(i)}.
\end{aligned}
$$

Lad $\mathcal{D}$ være den mindste C^*-algebra, der indeholder $D_l^{(i)}$ for alle $l \geq 1$ og $1 \leq i \leq n$. Dette er en kommutativ algebra.

Vi vil vise, at $\mathcal{D}$ er diagonaliserbar (d.v.s. at der findes en ortonormal basis for Hilbert rummet således, at enhver operator i $\mathcal{D}$ kan diagonaliseres med hensyn til denne basis). Da $\mathcal{D}$ kommuterer med P_k for alle $k \geq N$, vil de endeligtdimensionale underrum $\mathcal{H}_N := \mathcal{L}_N$ og $\mathcal{H}_k := \mathcal{L}_k - \mathcal{L}_{k-1}$ for $k > N$ være invariante for $\mathcal{D}$. Derfor, ved at restringere $\mathcal{D}$ til $\mathcal{H}_k$ for ethvert $k \geq N$ får vi en kommuterende familie af normale operatorer (ja, endog matricer). Denne familie er diagonaliserbar, da vi arbejder på et endeligtdimensionalt rum. Vælg så en basis for $\mathcal{H}_k$, der diagonaliserer alle operatorerne i denne familie. Den basis for $\mathcal{H}$, der fås ved at samle alle disse basis for alle $k \geq N$ vil diagonalisere $\mathcal{D}$, thi $\mathcal{H}_k$ for $k \geq N$ er parvis disjunkte og $\overline{\bigcup_{k \geq N} \mathcal{H}_k} = \mathcal{H}$.

Sæt

$$D_i = \sum_{k \geq 1} 2^{-l} D_k^{(i)},$$

og bemærk, at D_i er en positiv diagonal operator i $\mathcal{D}$. Lad nu $K_i = A_i - D_i$. Dette giver

$$\begin{aligned} K_i &= \sum_{k=1}^{N} 2^{-k}(E_k^{(i)} - E_k^{(i)}) + \sum_{k>N} 2^{-k}(E_k^{(i)} - E_k^{(i)} + E_k^{(i)} P_k) \\ &= \sum_{k>N} 2^{-k} E_k^{(i)} P_k. \end{aligned}$$

Det ses, at K_i er kompakte operatorer for hvert $1 \leq i \leq n$, idet $\sum_{k>N} 2^{-k} E_k^{(i)} P_k$ ligger i afslutningen af udspændingen af operatorer af endelig rang. Det ses også straks, at $\|K_i\| \leq 2^{-N} < \varepsilon$.

Vi har således vist den anden påstand i sætningen. Den første følger ved at anvende den anden på reel-og imaginærdelen af T, der begge er selvadjungerede.

$\square$

Flere generalisationer af dette resultat er siden blevet bevist. For den ivrige læser kan følgende anbefales: [2] og [3, Korollar II.5.5] (den såkaldte Voiculescus sætning).

Litteraturliste

[1] I. D. Berg, An extension of the Weyl-von Neumann theorem to normal operators, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 365-371.

[2] L. G. Brown, R. G. Douglas and P. A. Fillmore, Extensions of C^*-algebras and K-homology, Annals of Math. 105 (1977), 265-324.

[3] K. R. Davidson, C^*-algebras by example, Fields Institute Monographs No.6, 1996.

[4] J. von Neumann, Charakterisierung des Spectrums eines Integral Operators, Hermann, Paris, 1935.

[5] W. Sikonia, The von Neumann converse of Weyl's theorem, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970), 529-544.

[6] H. Weyl, Uber beschrankte quadratischen Formen deren Differentz vollstetig ist, Rend. Circ. Mat. Palermo 27 (1909), 373 - 392.

Fields prisen

- Prisen der populært kaldes Nobelprisen i matematik

Anders Nielsen

I fysik og litteratur har man Nobelprisen. I matematik har man „Fields medaljen“. I år blev prisen uddelt til Richard E. Borcherds, Maxim Kontsevich, William Timothy Gowers og Curtis T. Mcmullen. The International Mathematical Union uddelte også „Nevanlinna prisen“ for bemærkelsesværdigt arbejde indenfor datalogi til matematikeren Peter Shor.

Fields prisen og Nevanlinna prisen

Fields prisen er den højeste videnskabelige udmærkelse man kan få indenfor matematik. Prisen uddeles hvert fjerde år på the International Congress of Mathematicians (ICM) sammen med præmien på 15.000 canadiske dollars(ca. 65.000 kr.). Der er en aldersgrænse på 40 år for modtagerne af prisen. Aldersgrænsen er lavet for at sikre, at man ikke modtager prisen udelukkende for gammelt arbejde.

Fields prisen er kun et uofficielt navn for „International medal for outstanding discoveries in mathematics“. John C. Fields(1863-1932) organiserede International congress of mathematicians i 1924 i Toronto. Fields fik tiltrukket så mange sponsorer at der var penge i overskud efter kongressen. Disse penge blev brugt til at stifte prisen. Den første medalje blev uddelt i 1936 på verdenskongressen i Oslo. Prisen bliver ofte omtalt som Nobelprisen i matematik, da Nobelpriskomiteen kun kan uddele nobelpriser til matematikere indirekte via anden naturvidenskab eller økonomi. Der er nemlig ingen Nobelpris i matematik.[1]

Fields medaljen er lavet i guld og viser Arkimedes sammen med et citat på latin på hver side af medaljen.

Nevanlinna prisen er blevet uddelt siden 1983 indenfor datalogi. Også denne pris uddeles i form af en guldmedalje og en pengepræmie. Prisen doneres af Helsinkis universitet til minde om den finske matematiker, Rolf Nevanlinna.

De 4 Fields medaljer blev i år uddelt til de følgende matematikere:

Richard E. Borcherds

Modtager medaljen på grund af sit arbejde indenfor felterne algebra og geometri. Specielt på grund af beviset for den såkaldte Moonshine formodning. Moonshine

[1] Rygtet vil vide, at grunden er, at Nobels kone havde en affære med matematiker.

formodningen giver en sammenhæng mellem såkaldte „monstergroups“ og elliptiske funktioner. Disse funktioner kan anvendes indenfor kemi til at beskrive molekylers strukturer. Monstergrupper derimod kan kun bruges indenfor ren matematik. „Monstergruppen“ er er den største „sporadiske, endelige, simple“ gruppe - og er et af de mest bizarre objekter i algebra. Den har flere elementer end der er elementer i universet (ca. $8 * 10^{53}$). Deraf navnet monster. I beviset har Borcherds benyttet mange ideer fra fysikkens strengteori - en overraskende frugtbar måde at gøre brug af teoretisk fysik indenfor matematik. Selvom strengteori stadig diskuteres af fysikere så tilbyder strenge måder at forklare mange gåder omkring universets opståen.

Maxim Kontsevich

Anerkendt indenfor ren matematik og teoretisk fysik. Er ekspert indenfor strengteori og kvantefysik. Han blev først kendt på bidrag til 4 problemer indenfor geometri. Han beviste en formodning af Witten og demonstrerede den matematiske ækvivalens mellem 2 problemer indenfor kvantegravitationsteori. Kvanteteorien om gravitation er et mellemstadie til en enhedsteori. Den forener fysiske teorier om makrokosmos (tyngdetiltrækning) og mikrokosmos (kræfter mellem elementære partikler). Et andet resultat fra Kontsevich tilhører knudeteori. Matematikere forsøger at klassificere alle knuder. Det er endnu ikke lykkedes, men Kontsevich har fundet den bedste karakterisering af knuder indtil nu. Selvom knudeteori er en del af ren matematik ser der ud til at være anvendelser indenfor andre videnskaber.

Williams Timothy Gowers

Har bidraget indenfor funktionalanalyse ved stor brug af metoder fra kombinatorisk teori. Disse to områder ser ud til at have meget lidt med hinanden at gøre og Gowers bidrag har været at bringe disse emner sammen på en frugtbar måde. Funktional analyse og kombinatiorisk teori har det til fælles, at mange problemer er relativt lette at formulere, men ekstremt svære at løse. Gowers har været i stand til at bevise nogle af Banachs formodninger. Banach var en excentrisk matematiker, der foretrak at bruge sin tid på polske cafeer, snarere end at opholde sig på sit kontor. I 1920'erne og 1930'erne fyldte han en notesbog med formodninger om funktionalanalyse mens han sad på „the Scottish Cafe“. Bogen blev af denne grund senere kendt som den skotske bog. Gower har især bidraget til teori om Banach rum. (En del af pensum i 2AN kurset). Banach rum finder anvendelse indenfor blandt andet kvantefysik.

Curtis T. McMullen

Modtager prisen på grund af hans arbejde indenfor geometri og „kompleks dynamik“ også kendt som kaosteori. Et af spørgsmålene drejede sig løsning af vilkårlige ligninger. For mange ligninger er det nødvendigt at benytte approksimative løsninger for at finde en løsning. F.eks. giver Newtonmetoden uden undtagelser ret præcise løsninger til andengradsligninger. McMullen konkluderede, at der ikke fandtes nogen tilsvarende universel metode der kunne benyttes for ligninger over grad 3. Et af McMullens vigtige resultater omhandler Mandelbrotmængden. Dette beskriver hvordan dynamiske systemer såsom vand eller vejr opfører sig. Et sådant system kan sprede sig eller samles i et centrum. Grænsen mellem de 2 ekstremer kaldes Julia mængden. McMullen undersøgte mængde og viste at resultater der muliggør bedre beskrivelser.

Nevanlinna prisen blev uddelt til

Peter Shor

Har lavet arbejde indenfor kombinatorisk analyse og kvantedatalogi. Fik verdensomspændende opmærksomhed, da han præsenterede en datalogisk metode til at faktorisere store tal. Dette kunne teoretisk set bruges til at bryde mange af de eksisterende kodningsteknikker. Ulempen ved hans arbejde er, at hans program kun kan køre på kvantecomputere som endnu kun eksisterer som prototyper. Kvantecomputere benytter sig af kvantestadier af atomer. Dette kan give computerkraft der er langt større end de nuværende parallelcomputere. Shors resultat medførte en eksplosion af forskning blandt fysikere og dataloger. Eksperter siger, at kvantecomputere vil være en realitet indenfor det næste tiår. Hans resultat vækker dog også bekymring hos nogle. Shor har bevist, at de nye computere vil betyde at den nuværende krypteringsteknik „RSA“ ikke længere vil være sikker. RSA metoden benytter sig af, at det er langt hurtigere at udregne en multiplikation, end at faktorisere multiplikationen og på den måde finde de originale tal, der blev multipliceret. Hvis Shors program benyttes, vil multiplikation og faktorisering være lige hurtigt at udføre. RSA vil i fremtiden derfor ikke være en sikker metode. Men kryptografer arbejder allerede på den næste generation af krypteringsmetoder.

Dette er baseret på information fra internettet, `http://www.tu-berlin.de/presse/pi/1998/pi182e.htm`.

Opgaveløsninger

Opgave 1

Denne opgave gik ud på at afgøre hvem der altid talte sandt, hvem der altid løj, og hvem der bare svarede tilfældigt, med kun tre ja/nej spørgsmål. En mulig løsning er:

Kald de tre mænd A, B og C, og fortæl dem hvem der er hvem.

1. Stil A spørgsmålet: „Er det mere sandsynligt at B siger sandheden end at C gør det?“, hvis ja så gå til pkt. 2 ellers så gå til punkt 5.
2. Stil C spørgsmålet: „Er du den der svarer tilfældigt?“, hvis ja så gå til pkt. 3 eller så gå til punkt 4.
3. Stil C spørgsmålet: „Siger A altid sandheden?“, hvis ja så siger B altid sandheden, C lyver altid og A svarer tilfældigt, ellers så siger A altid sandheden, C lyver altid og B svarer tilfældigt.
4. Stil C spørgsmålet: „Lyver A altid?“, hvis ja så taler C altid sandt, A lyver altid og B svarer tilfældigt, ellers så taler C altid sandt, B lyver altid og A svarer tilfældigt.
5. Stil B spørgsmålet: „Er du den der svarer tilfældigt?“, hvis ja så gå til pkt. 6 eller så gå til pkt. 7.
6. Stil B spørgsmålet: „Taler A altid sandt?“, hvis ja så taler C altid sandt, B lyver altid og A svarer tilfældigt, ellers så taler A altid sandt, B lyver altid og C svarer altid tilfældigt.
7. Stil B spørgsmålet: „Lyver A altid?“. hvis ja så taler B altid sandt, A lyver altid og C svarer tilfældigt, ellers så taler B altid sandt, C lyver altid og A svarer tilfældigt.

Opgave 2

Opgaven gik ud på at finde ud af hvor hurtigt tre personer kan komme over en bro

Det bedste bud vi har, kommer fra den oprindelige opgavestiller, men der er ingen garanti for, at det rent faktisk er et minimum, her på redaktionen tager vi gerne imod bud på hvordan det gøres hurtigere, men gengiver indtil videre opgavestillerens løsning[1].

Vi antager at broen har længde 1, dermed bliver As hastighed 1/10 (i broer pr. minut), Bs hastighed bliver 1/5, Cs hastighed bliver 1/2 og cyklens hastighed bliver 1.

[1] Dog oversat af redaktionen

Lad os sige at alle mændene skal komme i mål samtidig. jeg kan ikke forklare hvorfor, men det virker bare som det mest fornuftige.

Jeg tror meget kraftigt på at den hurtigste måde, er hvis B og C starter ud til fods, mens A tager cyklen. Ved et punkt y stiller A cyklen og går resten af vejen. På et tidspunkt når C til punktet y, han tager så cyklen og kører tilbage i punktet x, hvor han stiller cyklen, vender om og går videre over broen. B går til han kommer til det punkt hvor C stillede cyklen, som han så tager og kører resten af vejen.

Med denne fremgangsmåde vil A bruge $y + 10 * (1 - y)$ minutter på at komme over broen, B vil bruge $5 * x + (1 - x)$ minutter og C vil bruge $2 * y + (y - x) + 2 * (1 - x)$ minutter. Hvis vi sætter disse parvis lig hinanden[2], får vi følgende lineære ligningssystem:

$$\begin{aligned} 10 - 9y &= -3x + 3y + 2 \\ 10 - 9y &= 4x + 1 \end{aligned}$$

Hvis man løser dette får man $x = \frac{12}{25}$ og $y = \frac{59}{75}$.

Ved indsættelse fås således at det vil tage $\frac{73}{25} \approx$ 2,92 minutter for de tre mænd at komme over.

Opgave 3

Lad x betegne vinklen mellem x-aksen og liniestykket fra origo, til det punkt hvor fårets snor „slipper" tårnet, idet vi antager, at fåret trækker snoren så langt som muligt, sådan at den rette del af snoren er tangent til tårnet. Lad os i første omgang nøjes med at koncentrere os om arealet over x-aksen og til højre for linien $x = -1$.

Eftersom tårnet har radius 1, vil den rette del snoren havde længde x, ved at bruge lidt trigonometri får vi fårets koordinater til at være $(\cos(x) + x\sin(x), \sin(x) - x\cos(x))$. Afstanden fra origo til fåret bliver så pæn som $\sqrt{1 + x^2}$.

Lad y betegne vinklen mellem x-aksen og liniestykket fra origo til fåret. Ved lidt mere trigonometri (som overlades til læseren), kan vi finde y som funktion af x, nemlig $y = x - \tan^{-1}(x)$.

Integralet i polære koordinater er 1/2 gange integralet af radius over det interval vinklen gennemløber. Desværre kan vi ikke bare tage integralet fra 0 til π af $1 + x^2$, for det er ikke den radius x danner, men derimod den radius y danner. Vi kunne tage integralet over intervallet for y, men at finde fårets koordinater udtrykt ved y er ekstremt svært. Heldigvis kan vi tage integralet over x fra 0 til π af $1 + x^2$ ganget med ændring i y som funktion af ændring i x. Da $y = x - \tan^{-1}(x)$, bliver $dy/dx = 1 - 1/(1 + x^2)$.

Arealet bliver så:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left((1 + x^2)\left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1 + x^2 dx = \pi + \frac{\pi^3}{6}$$

Dette areal omfatter ikke trekanten med hjørner $(0, 0)$, $(-1, 0)$ og $(-1, pi)$, men dette areal går ud med arealet inden i tårnet (som fåret ikke kunne komme ind i).

[2] Husk at vi har antaget, at de skal bruge lige lang tid i alt (red.)

Resten af arealet er nemt at bestemme.

Opgave 4

Opgaven lød:

Betragt en pyramide konstrueret af lige store kuber, sådan at den kvadratiske grundfalde består af n^2 *kuber, det næste lag består af* $(n-1)^2$ *kuber, og så videre indtil toppen der består af en enkelt kube. Antag, at man kan tage alle disse kuber og lægge dem så de former et kvadrat. Vis, at da er enten* $n = 1$ *eller* $n = 4900$.

Problemet er at opgaven påstand ikke holder. For $n = 4900$ vil pyramiden ifølge vinket (som er godt nok), bestå af $\frac{1}{6} \cdot 4900 \cdot 4901 \cdot 9801 = 39228339150$, men dette er ikke et kvadrattal.

Tilfældet $n = 1$ er indlysende, men for hvilke(t) andre n vil antallet af kuber i pyramiden være et kvadrattal. Dette spørgsmål lader vi stå som en opgave til læseren.

Vink: De 4900 er ikke et fuldstændig tilfældigt tal.

Opgave 5

Vi bruger polære koordinater (r, θ).

Lad ϕ være vinklen mellem kurven i et punkt P, og linien gennem P og midten.

Man kan vise at $\tan(\phi) = f(\theta)/f'(\theta)$. Da de fire hunde altid vil udgøre hjørnerne i et kvadrat er $\phi = \frac{\pi}{4}$, og $f(\theta)/f'(\theta) = 1$. Det giver at $f(\theta) = ce^{\theta}$. For den hund der startet i $\theta = 0$ bliver $c = a/\sqrt{2}$.

Buelængden er givet ved

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{(f(x))^2 + (f'(x))^2} = a$$

Opgave 6

Hvis du har n punkter liggende på randen af enhedscirklen, og vælger et, er sandsynligheden for at de andre ligger indenfor en halvcirkel i positiv omløbsretning $1/(2^{n-1})$.

Hvis der er n punkter, bliver den samlede sandsynlighed $n/(2^{n-1})$. Bemærk at vi godt kan lægge sandsynlighederne sammen, for kun 0 eller 1 af vores begivenheder[3] kan være sande.

Opgave 7

Vi antager at sneen faldet med konstant hastighed 1. Så er snedybden til tiden t lig med t, sneplovens hastighed til tiden t er så $1/t$. $t = 0$ er så det tidspunkt hvor

[3] som er at alle punkterne ligger indenfor en halvcirkel i positiv omløbsretning fra punkt n

det begyndte at sne, og derudover definerer vi $t = x$ til at være det tidspunkt hvor sneploven starter.

Den strækning sneploven tilbagelægger den første time er,

$$\int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt$$

Ved udregning fås dette til at give $\log((x+1)/x)$. På tilsvarende vis fås at den strækning sneploven tilbagelægger den anden time er $\log((x+2)/(x+1))$.

Brug nu at sneploven rydder en dobbelt så lang strækning i den første time som i den anden, og løs problemet.

Opgave 8

Pointen er at det er meningsløst at beregne forevntningsværdien for dette spil. Antagelsen om at der er en 50% chance for at fordoble eller halvere beløbbet holder ikke. For at kunne beregne en forventningsværdi, må du præcist kende de mulige udfald. I dette tilfælde er beløbet i den anden kuvert ikke tilfældigt.

Opgaver

Opgave 1

Først en lille let opgave. Riemanns zetafunktion defineres ved:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

For $n = 1$ er rækken ikke konvergent. For lige n kan man relativt let beregne $\zeta(n)$, f.eks. vises det på Mat 2AN, at $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. For ulige n ved man ikke andet end at $\zeta(3)$ er irrational. Opgaven er nu at beregne:

$$\sum_{j=2}^{\infty}(\zeta(j) - 1)$$

På trods af, at vi stort set ikke ved noget om halvdelen af leddene, er denne sum alligevel ret nem at regne ud.

Opgave 2

En kasse indeholder to mønter. Den ene er ganske normal, men den anden krone på begge sider. En mønt tages fra kassen, og man ser hvad der er på den ene side. Hvis den side man ser er krone, hvad er så sandsynligheden for at der også er krone på bagsiden?

Opgave 3

5 pirater har fundet en skat på 1000 guldmønter. Ifølge piraternes regler, må den højest rangerende pirat foreslå en fordeling af mønterne. Hvis flertallet kan stemme for denne fordeling, bliver det sådan, ellers må piraten gå planken ud, og den næste i rækken skal så stille et forslag. Dette fortsætter indtil der er en fordeling der får et flertal, eller der kun er en pirat tilbage som så tager det hele. Enhver af piraterne kan foreslå en hvilken som helst fordeling, ens rang garanterer ikke at man får flere mønter end en pirat af lavere rang.

Antag alle pirater er uendeligt grådige, uendelig logiske og uendeligt blodtørstige, og at de alle ved dette gælder for dem alle. Enhver pirats højeste prioritet er at få så mange penge som muligt, den næsthøjeste prioritet er at lade de andre gå planken ud. Alle piraterne vil stemme for at smide en anden overbord, selvom de ikke får flere mønter ud af det, også selvom det vil koste dem selv livet, men ikke hvis det vil koste dem så meget som én mønt! Hvordan skal den første pirat foreslå at mønterne deles?

Generalisering af Fourier-transformationen

Troels Roussau Johansen

Jeg i det følgende beskrive en måde, hvorpå den fra MATEMATIK 2AN velkendte Fourier-transformation kan generaliseres. Umiddelbart er der mange måder, dette kan foretages på, idet man kan vælge at

- lave Fourier-transformation på $\mathbb{R}^n$, dvs. se på Fourier-transformation af visse funktioner på $\mathbb{R}^n$,
- Fourier-transformere tempererede distributioner på $\mathbb{R}^n$, dvs. se på Fourier-transformationen af kontinuerte lineære funktionaler på Schwartz-rummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
- udvikle teorien for Fourier-transformation på visse topologiske grupper.

Her vil jeg vælge at koncentrere mig om den sidste mulighed, idet den første er "triviel" og den anden kræver mere forberedelse, end det er passende at præsentere her, og fordi jeg har skrevet bachelorprojekt om den sidste...

Faktisk vil det vise sig, at også den sidste mulighed er ganske teknisk og af pladshensyn vil jeg derfor fokusere på at *definere* Fourier-transformationen, men jeg håber at kunne formidle i det mindste hovedtrækkene af teorien i løbet af de næste afsnit.

Indledning

I teorien for Fourier-rækker betragtes 2π-periodiske funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Disse funktioner kan identificeres med funktionerne f på $[-\pi, \pi]$ der opfylder, at $f(-\pi) = f(\pi)$ (det de sidstnævnte funktioner tænkes udvides til hele $\mathbb{R}$). En alternativ – og i vores tilfælde bedre – måde at anskue tingene på, er at identificere de 2π-periodiske på $\mathbb{R}$ med funktionerne defineret på kvotientgruppen $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ bestående af ækvivalensklasserne hørende til ækvivalensrelationen $\sim$ i $\mathbb{R}$ defineret ved $\theta_1 \sim \theta_2 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \theta_2 - \theta_1 = 2\pi n$. Disse klasser er præcis originalmængderne til de enkelte punkter på $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ ved afbildningen $\theta \mapsto e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}$, og en 2π-periodisk funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kan derfor identificeres med med en funktion $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ via $f(\theta) = \varphi(e^{i\theta})$.

For at blive lidt ved Fourier-rækker, kan vi også vælge at opfatte det som en specialisering af Fourier-transformationen på $\mathbb{R}$ til $\mathbb{Z}$ – vi ser kun på Fourier-rækker for visse periodiske funktioner, og den eneste periodiske funktion, der samtidig har en Fourier-transformeret, er nul-funktionen. Vi kan således opfatte udvikling i Fourier-rækker som Fourier-analyse på $\mathbb{Z}$.

Begge synspunkter er brugbare, og det, vi i det det følgende skal generalisere ud fra, er at $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{R}$ alle er topologiske grupper med visse pæne egenskaber.

Topologiske grupper og kommutative Banach-algebraer

Idet læseren sikkert er stødt på grupper og topologiske rum på et eller andet tidspunkt, tillader jeg mig at lægge hårdt ud med en

. *Ved en **topologisk gruppe** forstås en trippel $(G, \mathcal{T}, \circ)$, hvor $(G, \mathcal{T})$ er et topologisk rum og hvor $(G, \circ)$ en gruppe, hvorom det gælder, at afbildningen $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ af $G \times G$ ind i G er kontinuert.*

Ofte tillader man sig at omtale G som den topologiske gruppe, når det fremgår af sammenhængen, hvad $\mathcal{T}$ og $\circ$ er. Af naturlige årsager omtales G derfor som en lokalkompakt topologisk gruppe, hvis $(G, \mathcal{T})$ er et lokalkompakt topologisk rum, og på helt tilsvarende vis indføres en Hausdorff topologisk gruppe. Vi vil i det følgende udelukkende betragte en topologisk gruppe G, der er lokalkompakt, Hausdorff, abelsk og desuden σ-kompakt[1]. En sådan gruppe kaldes for kortheds skyld en LCA-gruppe. Grunden til at betragte disse tilsyneladende meget specielle grupper er, at man da kan finde et såkaldt *Haar-mål* herpå:

. *Lad G være en LCA-gruppe, og lad $\mathfrak{B}(G)$ betegne Borel σ-algebraen på G. Da findes der et positivt mål μ på G med følgende egenskaber:*

1. $\forall K \subseteq G$ *kompakt er* $\mu(K) < \infty$
2. $\forall A \in \mathfrak{B}(G) : \mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U \text{ hvor } U \text{ er åben}\}$
3. $\forall U \subseteq G$ *åben er* $\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U \text{ hvor } K \text{ er kompakt}\}$
4. $\forall x \in G \, \forall A \in \mathfrak{B}(G) : \mu(xA) = \mu(A)$.

Dette mål μ kaldes et (venstre) Haar-mål på G.

Fordi G er antaget at være abelsk, er det oplagt, at $\mu(xA) = \mu(Ax)$, dvs. μ er samtidig et højre Haar-mål, og vi kalder da blot μ for et Haar-mål. Iøvrigt kan 1.-3. opsummeres i udsagnet, at μ er et regulært Borel-mål på G.

Beviset for denne sætning er ganske teknisk og vil blive forbigået. Der findes flere udgaver, afhængigt af om man er villig til at benytte Udvalgsaksiomet eller ej, og interessere læsere kan kigge i [1] eller [3]. Fordi vi desuden om G har antaget σ-kompakthed, kan vi relativt nemt bevise følgend

. *Lad μ_1 og μ_2 være Haar-mål på LCA-gruppen G. Da findes et $\lambda > 0$ så $\mu_2 = \lambda\mu_1$.*

Bevis. Vælg et fast $g \in C_c(G)$ med $\int_G g\mu_1 = 1$, og lad $\lambda = \int_G g(-x)\, d\mu_2(x)$. For alle $f \in C_c(G)$ er da, idet alle integrationer er over G

$$\begin{aligned}
\int f\, d\mu_2 &= \int g(y)\, d\mu_1(y) \int f(x)\, d\mu_2(x) = \int g(y)\, d\mu_1(y) \int f(x+y)\, d\mu_2(x) \\
&= \int d\mu_2(x) \int g(y) f(x+y)\, d\mu_1(y) = \int d\mu_2(x) \int g(y-x) f(y)\, d\mu_1(y) \\
&= \int f(y)\, d\mu_1(y) \int g(y-x)\, d\mu_2(x) = \lambda \int f\, d\mu_1.
\end{aligned}$$

idet vi netop har sikret os, at Fubinis sætning KAN benyttes. ☐

[1] Dette krav medtages af tekniske grunde, men udelades ofte.

Vi forestiller os nu givet et Haar-mål μ på LCA-gruppen G og kan derfor betragte mængden $L^1(G,\mu)$ af (klasser af) *Haar-integrable funktioner* på G. For $f, g \in L^1(G)$ definerer vi formelt foldningen $f \star g$ af f og g ved fastsættelsen

$$f \star g(x) = \int_G f(x-y)g(y)\, d\mu(y).$$

Hvis ellers $f \star g$ er defineret, så er det ikke svært at vise, at $\star$ er en kommutativ operation i $L^1(G)$. Man kan nu vise følgende centrale resultat:

. *Om det komplekse Banach-rum $L^1(G)$ gælder, at*

- $\forall f, g, h \in L^1(G) : f \star (g \star h) = (f \star g) \star h,$
- $\forall f, g, h \in L^1(G) : (f+g) \star h = f \star h + g \star h$ *og* $f \star (g+h) = f \star g + f \star h,$
- $\forall f, g \in L^1(G)\, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \alpha(f \star g) = (\alpha f) \star g = f \star (\alpha g).$

Endvidere gælder der om operationen *, *defineret på* $L^1(G)$ *ved* $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ *for* $f \in L^1(G)$ *og* $x \in G$, *at*

- $\forall f, g \in L^1(G)\, \forall \lambda \in \mathbb{C} : (f+g)^* = f^* + g^*, (\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*,$
- $\forall f, g \in L^1(G) : (f \star g)^* = g^* \star f^*$ *og* $f^{**} = f.$

Slutteligt findes der et element $\mathbf{1} \in L^1(G)$ *med egenskaberne* $\|\mathbf{1}\| = 1$ *og* $\mathbf{1} \star f = f \star \mathbf{1} = f$ *for alle* $f \in L^1(G)$ *hvis og kun hvis* G *er diskret.*[2]

De læsere, der har kendskab til funktionalanalyse udover MATEMATIK 3AN vil hurtigt se, at dette præcist svarer til at sige, at $(L^1(G), \star)$ er en kommutativ Banach-algebra med involution, som viser sig at have en enhed hvis og kun hvis G er diskret.

Nu er det ofte sådan i matematik, at man kan lette bevisbyrden ved at generalisere, og derfor nævner jeg følgende

. *En kompleks Banach-algebra med enhed er en kommutativ ring* $(\mathfrak{A}, +, \cdot)$, *hvor* $(\mathfrak{A}, +)$ *er et komplekst Banachrum med supmultiplikativ norm* $\|\cdot\|$, *og hvor der findes et element* $\mathbf{1} \in \mathfrak{A}$ *med egenskaberne* $\|\mathbf{1}\| = 1$ *og* $\mathbf{1} \cdot x = x \cdot \mathbf{1} = x$ *for alle* $x \in \mathfrak{A}$.

Og da vi alligevel er ved de abstrakte ting, så kommer her endnu en

. *En delmængde* I *af en kommutativ Banach-algebra* $(\mathfrak{A}, +, \cdot)$ *kaldes et ideal hvis* I *er et underrum af* $\mathfrak{A}$ *og der for alle* $(x, y) \in \mathfrak{A} \times I$ *gælder, at* $x \cdot y \in I$. *Idealet* I *siges at være ægte, hvis* $\mathfrak{A} \setminus I \neq \emptyset$, *og at være maksimalt, hvis* I *er ægte og der for et vilkårligt ideal* $J \supsetneq I$ *kan sluttes, at* $J = \mathfrak{A}$.

Forbindelsen mellem algebraen og funktionalanalysen etableres nu via begrebet *kompleks homomorfi* på Banach-algebraen $\mathfrak{A}$, ved hvilken vi forstår en kontinuert lineær funktional $\chi : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ med egenskaben, at $\chi(x \cdot y) = \chi(x)\chi(y)$ for alle $x, y \in \mathfrak{A}$. Lader vi Δ betegne mængden af komplekse homomorfier, kan man nu vise følgende for teorien centrale

. *Lad* $\mathfrak{A}$ *være en kommutativ (kompleks) Banach-algebra med enhed. Så gælder der*

1. $\|\chi\| = 1$ *for alle* $\chi \in \Delta$,

[2] Man lærer i et videregående kursus i funktionalanalyse, hvordan man på kanonisk vis kan tilføje en enhed.

2. *Hvis* $\chi \in \Delta$ *så er ker* χ *et maksimalideal i* $\mathfrak{A}$*, og*
3. *Ethvert maksimalideal* I *i* $\mathfrak{A}$ *kan på entydig vis skrives som* $I =$ *ker* χ*, hvor* $\chi \in \Delta$.

Hvorfor dette skulle have noget med harmonisk analyse at gøre, endsige være centralt, står ikke lysende klart. Det viser sig dog at hænge sammen med begrebet *karakterer*, der indføres lidt senere.

Lad der stadig være givet en kompleks Banach-algebra $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ specielt er et Banach-rum, er $\mathfrak{A}^*$ ligeledes et Banach-rum – omtalt som $\mathfrak{A}$'s (norm)duale. Den naturlige topologi herpå er for stærk efter min smag, så der indføres en ny og svagere topologi på $\mathfrak{A}$ på følgende måde:

. *Ved svag*-topolgien på* $\mathfrak{A}^*$ *forstås initialtopologien på* $\mathfrak{A}^*$ *mht. familien* $\mathfrak{F} = \{\gamma_x \,|\, x \in \mathfrak{A}\}$ *af afbildninger* $\gamma_x : \mathfrak{A}^* \to \mathbb{C}$ *defineret ved* $\gamma_x(\Lambda) = \Lambda x$ *for* $\Lambda \in \mathfrak{A}^*$.

Da svag*-topologien er en initialtopologi, er det velkendt fra MATEMATIK 3GT, at for alle $\Lambda \in \mathfrak{A}^*$ udgør mængderne

$$\gamma_{x_{i_1}}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap \gamma_{x_{i_n}}^{-1}(O_{i_n})$$

som indeholder Λ, en omegnsbasis i Λ, og det er da ganske let at vise, at $(\mathfrak{A}^*, \mathrm{wk}^*)$ – vektorrummet $\mathfrak{A}^*$ udstyret med svag*-topologien – bliver et Hausdorffrum. Det viser sig endvidere, at den afsluttede enhedskugle $\mathbb{B}^*$ heri altid er svag*-kompakt[3] – dette resultat er kendt som Alaoglus sætning, og er straks lidt sværere at vise.

Siden vi i form af sætning 4 ved, at der er en bijektiv forbindelse mellem Δ og mængden $\mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$ af maksimalidealer i $\mathfrak{A}$, og $\Delta \subseteq \mathfrak{A}^*$, er det naturligt at udstyre Δ med den inducerede svag*-topologi fra $\mathfrak{A}^*$ og omtale dette som $\mathfrak{A}$'s maksimalidealrum. Om dette gælder der følgende tilfredstillende resultat:

. *Hvis* $\mathfrak{A}$ *er en kompleks kommutativ Banach-algebra med enhed, så er* $\Delta(\mathfrak{A})$ *et kompakt Hausdorffrum.*

Bevis. Da $\Delta \subseteq \mathbb{B}^*$, hvor $\mathbb{B}^*$ betegner den svag*-afsluttede enhedskugle i $\mathfrak{X}^*$, er det ifølge Alaoglus sætning nok at vise, at Δ er svag*-afsluttet. Lad derfor $(\varphi_i)_{i \in I}$ være et net fra Δ med $\varphi_i \to \varphi \in \mathbb{B}^*$. Da der for alle $a, b \in \mathfrak{X}$ gælder, at $\lim \varphi_i(ab) = \lim \varphi_i(a)\varphi_i(b) = \varphi(a)\varphi(b)$, vil $\varphi \in \Delta$. □

Hvis $\mathfrak{X}$ ikke har en enhed, bliver Δ kun lokalkompakt. Dette kan vi konkretisere til udsagnet, at mængden af komplekse homomorfier på $L^1(G)$ er et lokalkompakt Hausdorffrum under den inducerede svag*-topologi fra $L^1(G)^*$. Dette viser sig at være vigtigt, men samtidig bemærkes det, at ovenstående bevis ikke har noget med maksimalidealer at gøre, så det ser ud til, at jeg spilder god spalteplads på irrelevante ting. Jeg beder læseren om at udvise lidt tålmodighed.

[3]Hvorimod den afsluttede enhedskugle i et normeret rum er norm-kompakt hvis og kun hvis rummet er endelig-dimensionalt.

Eksempel: Det er på nuværende tidspunkt velkendt, at $\ell^1(\mathbb{Z})$ er en kommutativ Banach-algebra med $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|$ og $f \star g(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)$, med enheden $\mathbf{1} = 1_{\{0\}}$. I dette forholdsvis simple tilfælde er det samtidig forholdsvis simpelt at "udregne" maksimalidealrummet, dvs. vise, at det op til en homeomorfi er et velkendt topologisk rum. Det viser sig, at maksimalrummet for $\ell^1(\mathbb{Z})$ er homeomorft med $\mathbb{T}$, og dette vil jeg vise. For alle $z \in \mathbb{Z}$ defineres $\varphi_z : \ell^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ ved $\varphi_z(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^n$, $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, som oplagt er en lineær, begrænset og ikke-triviel funktional. Det følger desuden af Fubinis Sætning, at $\varphi_z(f \star g) = \varphi_z(f)\varphi_z(g)$, så φ_z er et element i maksimalidealrummet $\mathcal{M}_{\ell^1(\mathbb{Z})}$. Defineres nu $\Phi : \mathbb{T} \to \mathcal{M}_{\ell^1(\mathbb{Z})}$ ved $\Phi(z) = \varphi_z$, bliver Φ en homeomorfi: For alle $n \in \mathbb{Z}$ defineres $f_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ved $f_n(n) = 1$ og $f_n(k) = 0$ for $k \neq n$. Så er det let at efterse, at $f_0 = \mathbf{1}$, $\|f_n\| = 1$ og $f_n \star f_k = f_{n+k}$ for alle $n, k \in \mathbb{Z}$. Endvidere er $\Phi(z)(f) = z$ for alle $z \in \mathbb{T}$, så Φ er injektiv. For at se, at Φ er surjektiv lader vi $\psi \in \mathcal{M}_{\ell^1(\mathbb{Z})}$ og sætter $z_0 = \varphi(f_1)$. Herved bliver $|z_0| \leq 1$, men på den anden side er $\mathbf{1} = f_1 \star f_{-1}$ så $\mathbf{1} = z_0\varphi(f_{-1}) = |z_0||\varphi(f_{-1}) \leq |z_0|$, dvs. $z_0 \in \mathbb{T}$. Da φ er en homomorfi, er $\varphi(f_n) = \varphi(f_1 \star \cdots \star f_1) = \varphi(f_1)^n = z_0^n$ for alle n, så da $\mathbf{1} = f_n \star f_{-n}$ bliver $\varphi(f_n) = z_0^n \, \forall n \in \mathbb{Z}$. Hvis således $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, bliver $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)f_n$ konvergent i $\ell^1(\mathbb{Z})$. Da φ er kontinuert og lineær, bliver således $\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\varphi(f_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z_0^n = \varphi_{z_0}(f)$ for alle $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, dvs. Φ er surjektiv. Hvis $z_\alpha \to z \in \mathbb{T}$, er det let at se, at $\lim_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z_\alpha^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^n$ for alle $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, så at $\Phi(z_\alpha) \to \Phi(z)$ – dette viser, at Φ er kontinuert. Da både $\mathbb{T}$ og $\mathcal{M}_{\ell^1(\mathbb{Z})}$ er kompakte Hausdorffrum, bliver Φ en homeomorfi.

Fourier-transformationen på en LCA-gruppe.

. *Ved en karakter for den topologiske gruppe G forstås en kontinuert afbildning $\psi : G \to \mathbb{C}$, hvor $\forall x, y \in G : \psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ og $\forall x \in G : |\psi(x)| = 1$.*

Eksempel: Lader vi $G = (\mathbb{R}, +, |\cdot|)$ og betegner vi med e_c afbildningen $x \mapsto e^{icx}$, $c \in \mathbb{R}$, er karaktererne for G netop e_c'erne: Det er let at se, at e_c er en karakter for $c \in \mathbb{R}$. Lad nu $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en karakter og sæt $f(x) = \int_0^x \chi(t)\,dt$. Så er $f \in C^1(\mathbb{R})$ idet

$$\begin{aligned} f(x+a) &= \int_0^{x+a} \chi(t)\,dt = \int_0^x \chi(t)\,dt + \int_x^{x+a} \chi(t)\,dt = f(x) + \int_0^a \chi(x+t)\,dt \\ &= f(x) + \chi(x)\int_0^a \chi(t)\,dt = f(x) + \chi(x)f(a). \end{aligned}$$

Da $\chi(0) = 1$ og χ er kontinuert i 0, findes der $a \in \mathbb{R}$ så $f(a) \neq 0$. Men så er $\chi(x) = \frac{1}{f(a)}(f(x+a) - f(x))$ differentiabel mht. x, og for alle $x, y \in \mathbb{R}$ gælder således, at $\chi'(x+y) = \chi(x)\chi'(y)$. Med $y = 0$ og $k := \chi'(0)$ bliver $\chi'(x) = k\chi(x)$, og dermed er $\chi(x) = e^{kx}$. Da $|\chi(x)| = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$, er $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dvs $\chi(x) = e^{i\xi x}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Vi er altså tilbage i den oprindelige situation, hvor vi antog, at G ligefrem var en LCA-gruppe, og det, der skal samle de mange begreber, er, at vi faktisk kan identificere mængden $\widehat{G}$ af karakterer på LCA-gruppen G med maksimalidealrummet $\Delta(L^1(G))$ på en helt "konkret" måde. Faktisk viser identifikationen sig at være den søgte Fourier-transformation!!!

Et lille (og i grunden ganske overkommeligt) skridt på vejen er at overbevise sig om gyldigheden af

. *Hvis vi for $\psi, \psi' \in \widehat{G}$ definerer operationen $+$ i $\widehat{G}$ ved $(\psi + \psi')(x) = \psi(x) + \psi'(x)$ for $x \in G$, som neutralelement benytter indikatorfunktionen på G, og til $\psi \in \widehat{G}$ knytter det inverse element $-\psi$ defineret ved $x \mapsto \overline{\psi(x)} = \frac{1}{\psi(x)}$, så er $\widehat{G}$ en abelsk gruppe.*

Lad i det følgende G være en LCA-gruppe, og lad $R(G)$ være G's *gruppealgebra*, dvs. den kommutative Banach-algebra, der fås ud fra $L^1(G)$ ved at tilføje en enhed. Så er et typisk element fra $R(G)$ af formen $\alpha e + f$, hvor $\alpha \in \mathbb{C}$ og $f \in L^1(G)$ (og e betegner den tilføjede enhed). Man kan da vise, at $L^1(G)$ udgør et maksimalideal i $R(G)$. Mere interessant er dog følgende sætning, der er central for teorien:

. *Lad $\chi \in \widehat{G}$ være en vilkårlig karakter på G og lad $f \in L^1(G)$. Ved at definere $\widehat{f}$ ved*

$$\varphi_\chi(f) := \widehat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, dm(x),$$

hvor m er et fast Haar-mål på G, bliver afbildningen $\lambda e + f \mapsto \lambda + \widehat{f}(\chi)$ fra $R(G)$ ind i $\mathbb{C}$ en homomorfi af $R(G)$ på $\mathbb{C}$, som ikke forsvinder på hele $L^1(G)$. Omvendt fås enhver homomorfi, der ikke forsvinder på hele $L^1(G)$, på denne måde, og forskellige karakterer inducerer forskellige homomorfier.

Specielt vil afbildninden $\imath : \chi \mapsto \varphi_\chi$ fra $\widehat{G}$ ind i $\Delta(L^1(G))$ være bijektiv, og da vi allerede har givet en topologi på $\Delta(L^1(G))$ – nemlig den fra $(L^1(G))^*$ inducerede svag*-topologi – kan vi via $\imath$ introducere en lokalkompakt Hausdorff-topologi på $\widehat{G}$, så ialt har vi set, at $\widehat{G}$ som gruppe er abelsk og som topologisk rum er lokalkompakt og Hausdorff. Faktisk kan resultatet skærpes betydeligt:

. *Hvis G er en LCA-gruppe, da også $\widehat{G}$.*

Tiden er atter kommet til at træder et skridt tilbage og trækker på lidt overordnede ting fra funktionalanalysen. Dette gøres som oftest bedst med en

. *Lad $\mathfrak{A}$ være en (kompleks) Banach-algebra. Ved* Gelfand-transformationen *på $\mathfrak{A}$ vil vil forstå afbildningen $\Gamma : \mathfrak{A} \to C(\mathcal{M}_{\mathfrak{A}})$ defineret ved $\Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x)$, hvor $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathfrak{A}}$.*

Læseren henvises til et videregående kursus i funktionalanalyse – for eksempel MATEMATIK 4AN – for nærmere detaljer om denne skumle afbildning. Dog vil jeg her nævne, at man relativt let kan vise, at Gelfand-transformationen er en kontinuert, lineær homomorfi af $\mathfrak{A}$ ind i $C_0(\mathcal{M}_{\mathfrak{A}})$.

De allerede nævnte resultater kan vi nu opsummere i følgende – forhåbentligt – overskuelige diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{G} \arrow[dl, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{Sætning 6}"] & \\
\mathcal{M}_{L^1(G)} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Sætning 4}"'] & & \Delta(L^1(G))
\end{tikzcd}$$

For at opsummere i ord, er den bijektive forbindelse mellem $\widehat{G}$ og $\Delta(L^1(G))$ faktisk en homeomorfi pr. konstruktion af topologi på $\widehat{G}$ via svag*-topologien på $\Delta(L^1(G)) \subseteq (L^1(G))^*$, ganske som bijektionen mellem $\mathcal{M}_{L^1(G)}$ og $\Delta(L^1(G))$ er det.

Interessen for mængden $\mathcal{M}_{L^1(G)}$ af maksimalidealer i $L^1(G)$ skyldes, at det er om denne, den generelle Gelfand-teori udtaler sig om, mens vi er ude efter at sige noget om $\widehat{G}$. Ydermere er identifikationen mellem $\widehat{G}$ og $\Delta(L^1(G))$ højst ikke-triviel, idet elementerne i $\widehat{G}$ er visse kontinuerte homomorfier på G, mens elementerne i $\Delta(L^1(G))$ er visse lineære funktionaler på $L^1(G)$.

Der gælder, som nævnt tidligere, at $\Delta(L^1(G))$ og $\widehat{G}$ er homeomorfe via afbildningen $\imath : \widehat{G} \to \Delta(L^1(G))$ defineret ved $\imath(\chi) = \varphi(\chi)$. Afbildningen $\imath^* : C_0(\Delta(L^1(G))) \to C_0(\widehat{G})$ defineret ved $\imath^*(f) = f \circ \imath$ bliver da en *-isomorfi, og da $((\imath^* \circ \Gamma)(f))(\chi) = (\Gamma f)(\imath(\chi)) = (\Gamma f)(\varphi_\chi) = \widehat{f}(\chi)$, er $\imath^* \circ \Gamma = \widehat{f}$. Af denne grund ser man ofte i litteraturen Gelfand-transformationen indført som afbildningen $\widehat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$ defineret ved $\widehat{x}(h) = h(x)$, hvor $h \in \Delta$ og $x \in L^1(G)$.

Men man ser nu, at det faktisk ER Gelfand-transformationen, der er indført i sætning 6, og vi kan da umiddelbart citere følgende resultat vedrørende Fourier-transformationen:

. *Lad $f, g \in L^1(G)$. Da gælder der*

1. $\widehat{f} \in C_0(\widehat{G})$,
2. $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\widehat{g}$,

hvor altså

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)}\, d\mu(x).$$

Her kan man opfatte 1. som en generalisering af den klassiske sætning af Riemann-Lebesgue, idet vi ud fra ovenstående eksempel kan se, at der for $G = \mathbb{R}$ ER tale om den klassiske Fourier-transformation.

Resultater, man viser, hvis man har mere plads

Det vil efter definitionen af Fourier-transformationen på en LCA-gruppe G og udledningen af de mest basale egenskaber være oplagt at kaste sig over de fra MATEMATIK 2AN velkendte, klasiske resultater om Fourier-transformationen på $\mathbb{R}$, såsom Inversionssætningn og Plancherals sætning. Det viser sig faktisk, at disse resultater kan generaliseres ganske betragteligt, men som så ofte før vil jeg udelade de mere tekniske detaljer og blot antyde, hvad der er i vente. Der gælder nemlig følgende smukke sætninger, og bare det, at de gælder, er tilstrækkelig grund til at studere teorien nærmere:

Plancherels Sætning. *Lad G være en LCA-gruppe. Så gælder der*

1. *For ethvert $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ er $\widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$ og $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$, dvs. Fourier-transformationen på $L^1(G) \cap L^2(G)$ er en isometri.*
2. *Afbildningen $f \mapsto \widehat{f}$ af $L^1(G) \cap L^2(G)$ ind i $L^2(\widehat{G})$ kan udvides til en unitær afbildning $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$ af $L^2(G)$ på $L^2(\widehat{G})$.*
3. *For $f, g \in L^2(G)$ er $\langle f, g \rangle_{L^2(G)} = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle_{L^2(\widehat{G})}$*

4. *For $\psi \in L^1(\widehat{G}) \cap L^2(\widehat{G})$ er*

$$(\mathcal{F}^{-1}\psi)(x) = \int_{\widehat{G}} \psi(\chi)\chi(x)\, d\chi(x) \text{ for alle } x \in G.$$

5. *For $f, g \in L^2(G)$ gælder Parsevals formel:*

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x) = \int_{\widehat{G}} \mathcal{F}f(\chi)\overline{\mathcal{F}g}(\chi)\, d\chi.$$

Samt

Inversionssætningen II. *Haar-målet $d\chi$ på $\widehat{G}$ kan normeres på en sådan måde, at hvis $f \in L^1(G)$ og $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$, så vil $f \in C_0(G)$ μ-næsten overalt, og*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi(x)\, d\chi \text{ for alle } x \in G.$$

Afrunding

Jeg skal være den første til at indrømme, der er udeladt meget undervejs. Problemet er dog, at harmonisk analyse på LCA-grupper *er* en teknisk kompliceret disciplin inden for funktionalanalysen, og alene at nå frem til definitionen af Fouriertransformationen på G på en anstændig facon krævede 35 sider i mit bachelorprojekt omhandlende netop dette emne. Når man først HAR set den påkrævede funktionalanalyse, kan man skære noget i sideantallet, men tilbage er der stadig nogle seriøse målteoretiske problemer, der skal gennemarbejdes. Jeg håber dog ikke, jeg med disse bemærkninger har skræmt læseren fra – men snarere inspireret til – at kigge lidt nærmere på den smukke teori.

Litteraturliste

[1] Cohn, Donald L.: "*Measure Theory*", Birkhäuser, 1980

[2] Johansen, Troels R.:"*Konstruktion af Haar-målet og dets anvendelse i harmonisk analyse*", bachelorprojekt, foråret 1998

[3] Nachbin, Leopoldo: "*The Haar Integral*", D. van Nostrand Company, 1965

[4] Pedersen, Gert K.: "*Analysis Now*", 2nd Edition, Springer-Verlag, Inc., 1989

[5] Rudin, Walter: "*Functional Analysis*", 2nd Edition, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1991

[6] Rudin, Walter: "*Fourier Analysis on Groups*", Interscience Publishers, Inc., 1962

[7] Zhu, Keke: "*An Introduction to Operator Algebras*", CRC Press, Inc., 1993

π og fundamentalismen…

J. P. R. Christensen

> Fremdeles lavede han havet[a] i støbt arbejde, ti alen fra rand til rand, helt rundt, fem alen højt; det målte tredive alen i omkreds. — Første kongebog 7,23
>
> [a]det samme som: det såkaldte kobberhav, en stor vandbeholder.

Det er undertegnede skribent af nedenstående artikel, der er fundamentalist — alt i Biblen er fundamentalt, men noget er mere fundamentalt end andet.

Matematikere er ofte faldet i tanker over 1. Kongebog 7,23…

Hvor ofte har jeg ikke hørt, at biblens ufejlbarlighed hermed er aflivet! Vås — sludder …

Kobberhavet (trug til rituel vask i forbindelse med ofringer) angives at være 10 alen fra rand til rand. Altså er dets omkreds 10*Pi og det er jo mere end 30 alen! (10-30/Pi)/2 er faktisk tykkelsen i alen af karrets væg, hvis vi regner med at forfatteren har målt de 30 alen rundt langs den indre rand! Det er massivt men kan godt gå an! Man ved, at Israel havde forbindelse med både Babylonien og Egypten og at disse kulturer havde bedre værdier end 3 for Pi, når bygninger skulle beregnes. Jo den gamle forfatter anså bestemt kobberhavet for helt *fundamentalt*, men alligevel finder jeg det sandsynligt, at han bare tog et øjemål!