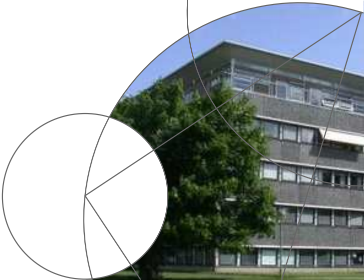
Matematikkens filosofi – filosofisk matematik

Flemming Topsøe, topsoe@math.ku.dk
Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet



Et svært spørgsmål

Hvad er matematik?

Matematik er læren om
strukturer og sammenhænge
der kan diskuteres på et abstrakt grundlag
og – via ræsonneren –
føre til præcise udsagn.

antydninger af en diskussion

abstrakt?

Det passer da ikke! Således optræder tallene, f.eks. 2, i matematikken, og det er da noget ganske konkret?

...hmmm... men så er matematik ikke en *natur*videnskab! – for i naturvidenskaberne søger vi sandheden om den fysiske verden, vi er anbragt i.

Matematik, hvorfor egentlig?

Der er to grunde til at beskæftige sig med matematik:

- som et middel til at opnå erkendelse på andre felter,
- som erkendelse i sig selv.

Hvad indgår i matematik?

Matematikken har tre bestanddele:

- Mængdelæren: et sæt genstande, mængder, for vor ræsonneren,
- Matematisk logik: et regelsæt for vor ræsonneren,
- Det æstetiske element, skønheden ...

Vi forlader matematikkens filosofi og ser på et eksempel på matematik, hvor filosofiske betragtninger spiller en stor rolle, filosofisk matematik:

verden og dig

Det hele er verden, Ω.
Situationer fra verden vedrører Naturen og Iagttager, dig!

Naturen har ingen bevidsthed – det har du!
Naturen er ikke kreativ – det er du!

Naturen er bærer af sandheden, x,
du søger sandheden, men er henvist til tro, y.

Med erfaring kommer viden, erkendelse, z.

En anden opfattelse af viden:
sådan *opfatter* du sandheden! perception

eksempler på situationer

Naturfænomener: vejret i morgen, kommer tsunamien?
Fysik: tilstanden af en gas i et varmebad, ...
Sundhed: virker pillen? kommer der en epedemi? ...
Samfund, økonomi: kursernes udsving ...
Den religiøse sfære: forholdet mellem Vorherre og dig, ...
Personlige forhold: elsker hun mig? ...
Litteraturen: Daphne myten ...
Psykologi: udfyldning, placebo effekt
Spil: hvor mange øjne? er terningen ægte? ...

eksempler på verdener

Antagelse:

Viden afledes af sandhed og tro tilsammen, idet der findes en funktion Π, vekselvirkeren eller interaktoren således, at $z = \Pi(x, y)$.

Eksempler:

- Den klassiske verden Ω_1 er karakteriseret ved at $z = x$,
  det, du ser, er det, der er sandt!
- Et sort hul Ω_0 er karakteriseret ved at $z = y$,
  det, du ser, er det, du tror!
- Blandinger, f.eks. $\Omega_{\frac{3}{4}}$ svarende til $z = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y$.

Score-funktioner

I enhver situation (x,y) indebærer det et besvær at nå frem til viden (z). Anden sprogbrug: Vi må betale en pris for at "score" den viden, der kan opnås i situationen. Lad $\mathrm{F}(x,y)$ betegne denne pris.

Vi kalder F en score-funktion og siger, at F er en ren score-funktion, hvis besværet er mindst når tro matcher sandhed, dvs. når der for alle x og y gælder, at $\mathrm{F}(x,y) \geq \mathrm{F}(x,x)$ med lighedstegn kun når $y = x$. (Iøvrigt: $\mathrm{F}(x,x)$ er entropien af x. Så entropi er minimalt besvær.)

Hovedopgave: Bestem en ren score-funktion og udtænk en tilhørende score-strategi der sikrer, at besværet (den pris, der skal betales) i en given situation er højst $\mathrm{F}(x,y)$.

Men hvordan? Det afhænger af den verden, vi befinder os i. Lad os se på verdener, hvor sandhed og tro udtrykkes i sandsynligheder:

Verdener baseret på sandsynlighed

Verdener, hvor situationer er bestemt ved sandsynligheder over et alfabet. Skematisk:

$\mathbb{A}$	sandhed	tro	viden
.	.	.	.
i	x_i	y_i	z_i
.	.	.	.

Husk: z er givet ved (x, y) gennem vekselvirkeren Π. Antag nu, at denne virker lokalt. Så findes en funktion π, den punktvise vekselvirker eller interaktor, som virker på de enkelte punktsandsynligheder og så kan vi ovenfor sætte $z_i = \pi(x_i, y_i)$.

I den klassiske verden er den punktvise vekselvirker funktionen π_1 givet ved $\pi_1(s, t) = s$ og i et sort hul er den punktvise vekselvirker funktionen π_0 givet ved $\pi_0(s, t) = t$.

din kreativitet sætter ind!

Lys idé: Glem i første omgang det med en score-strategi og fokusér på at

- det samlede besvær er summen af bidrag fra de enkelte udfald;
- besværet svarende til et enkelt udfald i er proportional med $z_i = \pi(x_i, y_i)$ der er den vægt med hvilken jeg, iagttageren, opfatter udfaldet;
- ud over denne proportionalitet afhænger besværet svarende til i kun af den troede sandsynlighed y_i.

Så findes en funktion κ, koderen, så det samlede besvær, score-funktionen, er givet ved

$$\mathrm{F}(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{A}} \pi(x_i, y_i) \kappa(y_i)\,.$$

opsummering: $F(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{A}} \pi(x_i,y_i)\kappa(y_i)$

$\mathbb{A}$	x	y	z	besvær (pris, energi...)
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
i	x_i	y_i	$z_i = \pi(x_i,y_i)$	$z_i\kappa(y_i) = \pi(x_i,y_i)\kappa(y_i)$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Om κ forlanger vi, at $\kappa(1) = 0$ (valg af nulpunkt) og at $\kappa'(1) = -1$ (valg af enhed).

$\kappa : [0,1] \mapsto [0,\infty]$, knytter til en given værdi af t (den sandsynlighed, du tror, et udfald har) det besvær, $\kappa(t)$, du er villig til, eller nødt til, at acceptere for at finde frem til udfaldet. Anden sprogbrug:

> $\kappa(t)$ er den pris, du er villig til at betale for at få information om at en hændelse er indtruffet, som funktion af hændelsens sandsynlighed t.

OBS: κ skal bestemmes, så den tilhørende score-funktion F er en ren score-funktion. Lad os se på det:

bestemmelse af κ i den klassiske verden

Vi gætter! Skal finde κ, så det for alle sandsynlighedsvektorer x og y gælder, at summen $\mathrm{F}(x,x)$ er $\leq$ summen $\mathrm{F}(x,y)$, se skema:

$\mathbb{A}$	x	y	bidrag til $\mathrm{F}(x,x)$	bidrag til $\mathrm{F}(x,y)$
1	x_1	y_1	$x_1\kappa(x_1)$	$x_1\kappa(y_1)$
2	x_2	y_2	$x_2\kappa(x_2)$	$x_2\kappa(y_2)$
.	.	.	.	.
i	x_i	y_i	$x_i\kappa(x_i)$	$x_i\kappa(y_i)$
.	.	.	.	.
sum	1	1	$\mathrm{F}(x,x)$	$\mathrm{F}(x,y)$

Et trick: Vis i stedet, at summen $\mathrm{F}(x,x)+1$ er $\leq$ summen $\mathrm{F}(x,y)+1$, se skema:

$\mathbb{A}$	x	y	bidrag til $\mathrm{F}(x,x)+1$	bidrag til $\mathrm{F}(x,y)+1$
1	x_1	y_1	$x_1\kappa(x_1)+x_1$	$x_1\kappa(y_1)+y_1$
2	x_2	y_2	$x_2\kappa(x_2)+x_2$	$x_2\kappa(y_2)+y_2$
.	.	.	.	.
i	x_i	y_i	$x_i\kappa(x_i)+x_i$	$x_i\kappa(y_i)+y_i$
.	.	.	.	.
sum	1	1	$\mathrm{F}(x,x)+1$	$\mathrm{F}(x,y)+1$

Satser på at dette endog gælder “ledvist”, dvs. at

$$s\kappa(s)+s \le s\kappa(t)+t \tag{1}$$

gælder for alle $0 \le s \le 1$ og alle $0 \le t \le 1$. Hold først s fast. Højre-siden i (1) er en funktion af t med mindsteværdi for $t=s$; derfor er der stationært punkt for $t=s$, dvs. $s\kappa'(s)+1=0$. Dette gælder alle s og bestemmer dermed en differentialligning. Løsningen med $\kappa(1)=0$ er funktionen $\boxed{\kappa(t)=\ln\frac{1}{t}.}$

... fortsat ...

Vi har gættet en κ-funktion og dermed en score-funktion! Men er det en ren score-funktion? Vi checker: Er

$$s\kappa(s) + s \leq s\kappa(t) + t \ ?$$

– eller: er

$$s \ln \frac{1}{s} + s \leq s \ln \frac{1}{t} + t \ ?$$

– eller: er

$$s \ln \frac{t}{s} \leq t - s \ ?$$

JA! – det følger af den velkendte ulighed $\ln x \leq x - 1$. Vi konkluderer:

> I den klassiske verden Ω_1 er F givet via $\kappa : t \curvearrowright \ln \frac{1}{t}$ den entydigt bestemte rene score-funktion!

...og hvad med score-strategien?

Det kan jeg kun antydningsvis komme ind på. En anden gang måske ... Det har noget med koder at gøre og også med beskrivelse: "Den, der kan beskrive verden, behersker verden!"
Vores enhed er naturlige enheder, nats. Skifter vi til binære enheder, bits, kan vi beskrive ved hjælp af binære koder, strenge af 0'er og 1'er. Og så kan besvær (pris) måles i antallet af binære cifre der skal til for at beskrive (kode) de enkelte udfald. ...
Skemaet næste side må være nok som antydning. Dér ser vi på det stokastiske fænomen, der består i tilfældigt at udvælge et bogstav i Dickens roman "to byer".
Der er vist to strategier, en dårlig (konstant kodeordslængde) og en smart svarende til en ren score-funktion.

Letter	frequency		fixed length word	length	Huffman code word	length	ideal length
a	47064	8.07 %	00000	5	1110	4	3.63
b	8140	1.40 %	00001	5	101111	6	6.16
c	13224	2.27 %	00010	5	01111	5	5.46
d	27485	4.71 %	00011	5	0110	4	4.41
e	72883	12.49 %	00100	5	000	3	3.00
f	13155	2.25 %	00101	5	111100	6	5.47
g	12120	2.08 %	00110	5	111101	6	5.59
h	38360	6.57 %	00111	5	1000	4	3.93
i	39786	6.82 %	01000	5	1010	4	3.87
j	622	0.11 %	01001	5	1111111110	10	9.87
k	4635	0.79 %	01010	5	11111110	8	6.98
l	21523	3.69 %	01011	5	10110	5	4.76
m	14923	2.56 %	01100	5	00111	5	5.29
n	41310	7.08 %	01101	5	1101	4	3.82
o	45118	7.73 %	01110	5	1100	4	3.69
p	9453	1.62 %	01111	5	101110	6	5.95
q	655	0.11 %	10000	5	1111111100	10	9.80
r	35956	6.16 %	10001	5	0010	4	4.02
s	36772	6.30 %	10010	5	1001	4	3.99
t	52396	8.98 %	10011	5	010	3	3.48
u	16218	2.78 %	10100	5	00110	5	5.17
v	5065	0.87 %	10101	5	1111110	7	6.85
w	13835	2.37 %	10110	5	01110	5	5.40
x	666	0.11 %	10111	5	1111111101	10	9.77
y	11849	2.03 %	11000	5	111110	6	5.62
z	213	0.04 %	11001	5	1111111111	10	11.42
total = 583.426		**100 %**	**mean = 5.00**		**mean = 4.19**		**H = 4.16**

tabel i uddrag

Letter	frequency		fixed length word	length	Huffman code word	length
a	47064	8.07 %	00000	5	1110	4
b	8140	1.40 %	00001	5	101111	6
c	13224	2.27 %	00010	5	01111	5
d	27485	4.71 %	00011	5	0110	4
e	72883	12.49 %	00100	5	000	3
f	13155	2.25 %	00101	5	111100	6
g	12120	2.08 %	00110	5	111101	6
h	38360	6.57 %	00111	5	1000	4
i	39786	6.82 %	01000	5	1010	4
j	622	0.11 %	01001	5	1111111110	10
k	4635	0.79 %	01010	5	11111110	8

Tak for nu!