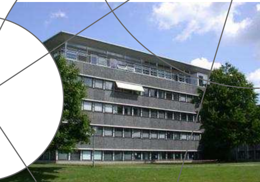
Om Sandhed, Tro og Viden i Naturvidenskaberne

Flemming Topsøe, topsoe@math.ku.dk
Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet



DEL I

Vi filosoferer

– og indfører kompleksitet, entropi og divergens

hvad vi lever af

Vi indleder med en banalitet:

> Ligesom mennesket ikke lever af brød alene,
> lever vi i naturvidenskaberne ikke af formler alene
> – ideer af almen karakter bærer også værket.

Ideerne skal lede os – det tekniske med formler og symbolsprog skal give ideerne konkret indhold og bane vejen for kvantitative overvejelser baseret på iagttagelse.

Og hvad lever vi *for*?

> I naturvidenskaberne søger vi sandheden om den fysiske verden,
> vi er anbragt i.

– så vi vil filosofere over vores tema:

verden og dig

Det hele er verden , $\mathcal{V}$.
Situationer fra verden vedrører Naturen og Iagttager, dig!

Naturen har ingen bevidsthed – det har du!
Naturen er ikke kreativ – det er du!

Naturen er bærer af sandheden,
du søger sandheden, men er henvist til tro .

Med erfaring kommer erkendelsen, viden.
Viden er syntesen af udstrakt erfaring.

interaktion (vekselvirkning)

Konkrete størrelser (instanser) i en typisk situation:
sandhed: x tro: y viden: z

En lidt anden (?) fortolkning af viden (z):
sådan *opfatter* du sandheden! (perception)

Fundamental og kritisk antagelse:
viden afledes af sandhed og tro tilsammen
– dvs. der findes en funktion, interaktoren Π, således at

$$z = \Pi(x, y)\,.$$

– absolut sandhed? virkelighed?
– erfaring, viden, erkendelse, perception?

Eksempler på verdener

Den klassiske verden $\mathcal{V}_1$ er karakteriseret ved interaktoren Π_1:

$$\Pi_1(x,y) = x\,,\ \text{så her er } z = x\,.\ \text{Her kan sandheden erfares:}$$

$\boxed{\text{det, du ser, er det, der er sandt.}}$

Et sort hul $\mathcal{V}_0$ er karakteriseret ved interaktoren Π_0:

$$\Pi_0(x,y) = y\,,\ \text{så her er } z = y\,.\ \text{Med andre ord:}$$

$\boxed{\text{det, du ser, er det, du tror.}}$

Blandinger (Tsallis verdener) , f.eks $\mathcal{V}_{\frac{3}{4}}$:

$$\mathcal{V}_{\frac{3}{4}}\,,\ \text{karakteriseret ved } \Pi_{\frac{3}{4}}(x,y) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\,.$$

Andre muligheder...(der er mange, men ovenstående er nok de vigtigste)

eksempler på situationer

Naturfænomener: vejret i morgen, hvor er askeskyen? ...
Fra fysikkens verden: tilstanden af en gas i et varmebad, ...
Sundhedssektoren: virker pillen? kommer der en epedemi? ...
Samfund, økonomi: kursernes udsving ...
Den religiøse sfære: forholdet mellem Vorherre og dig, ...
Personlige forhold: elsker hun mig? ...
Litteraturen: Daphne myten ...
Psykologi: udfyldning ...
Spil: hvor mange øjne? er terningen ægte? ...

Beskrivelse, besvær, kompleksitet

Den, der kan beskrive verden, behersker verden!
– men beskrivelse koster i form af et besvær for dig
og besværet afhænger både af sandheden og af din tro.

Notation: $\Phi(x,y)$ er besværet, når sandheden er x, din tro y.
Andet ord for "besvær": kompleksitet.
Vi kalder Φ for kompleksitetsfunktionen.

Vi vedtager: Kompleksitetsfunktionen er ren hvis
besværet er mindst når din tro matcher sandheden:
$\Phi(x,y) \geq \Phi(x,x)$ med lighedstegn kun når $y = x$.

I det følgende tænkes kun på rene kompleksitetsfunktioner.

entropi og information

Entropi (H) er uundgåeligt besvær! så: $H(x) = \Phi(x, x)$.

MaxEnt: Med flere muligheder for x, vælger Naturen den mest ugunstige for dig, den, med størst entropi. (mere senere)

Man kan også tænke positivt på besvær, på entropi:

Ved information kan man undgå besvær. Informationsmængde måles ved sparet besvær. Specielt: Ved fuld information om x, er den vundne informationsmængde lig med entropien $H(x)$.

Divergens og den fundamentale ulighed

Divergens (D) er et mål for hvor tæt y er på x og måles ved aktuelt besvær i forhold til minimalt besvær:
$D(x,y) = \Phi(x,y) - H(x)$.
Anderledes udtrykt: der gælder følgende, linking identiteten:
$\Phi(x,y) = H(x) + D(x,y)$.

Da vi har valgt en ren kompleksitetsfunktion gælder:

Informationsteoriens Fundamentale Ulighed (IFU)
$D(x,y) \geq 0$ med lighedstegn kun hvis $y = x$.

mer' om information, mer' om MaxEnt

Information er information om noget , for os om sandheden.
Typisk: "$x \in \mathcal{P}$" med $\mathcal{P}$ en mængde af mulige x'er, en preparation .

Jaynes maksimumentropiprincip, MaxEnt: Er "$x \in \mathcal{P}$" det, der vides, er sandheden det $x \in \mathcal{P}$ med størst entropi – ethvert andet x ville svare til at *du vidste noget mere!*

Det, du ser, afhænger af det, du ved.

I naturvidenskaberne er sandheden ikke absolut.

Bland ikke tingene sammen. Her tales om *viden*, ikke *tro*.
Fører til et nøglespørgsmål:

... hvad *k a n* vi vide?

Svaret er gemt i følgende opfattelse:

Tro er en tendens til handling!

- eller snarere et forvarsel herom.

Tro kan transformeres til kontrol .

Med kontrol kan Iagttager udføre eksperimenter .

Et eksperiment kræver en præparation.

Præparationerne fortæller, hvad Iagttager kan vide

Typisk præparation: Mængden af x for hvilke $\Phi(x, y_0)$ har en bestemt værdi. (y_0 bør transformeres til tilsv. kontrol)

Det, du kan vide, er det, du kan beskrive.

MaxEnt og robusthed

MaxEnt finder udstrakt anvendelse for præparationer som netop beskrevet. Den tekniske behandling er typisk ganske let ved udnyttelse af et nyt begreb:
y^* er robust for præparationen $\mathcal{P}$ såfremt $\Phi(x, y^*)$ er uafhængig af x, sålænge $x \in \mathcal{P}$.

Sætning Hvis x^*, y^* opfylder følgende betingelser:
$y^* = x^*$ (perfekt match), $x^* \in \mathcal{P}$, y^* robust for $\mathcal{P}$,
så er x^* det søgte MaxEnt-element.

Bevis: Antag $\Phi(x, y^*) = h$ for alle $x \in \mathcal{P}$. Så er

$$H(x^*) = \Phi(x^*, x^*) = \Phi(x^*, y^*) = h$$

og for hvert $x \in \mathcal{P}$ er

$$H(x) \le H(x) + D(x, y^*) = \Phi(x, y^*) = h\,.$$

Derfor!

DEL II

Vi ser på stokastiske modeller
og bestemmer konkrete rene
kompleksitetsfunktioner

Verdener baseret på sandsynlighed

Verdener, hvor situationer er bestemt ved sandsynligheder over et alfabet. Skematisk:

$\mathbb{A}$	sandhed	tro	viden
.	.	.	.
i	x_i	y_i	z_i
.	.	.	.

(f.eks i $\mathcal{V}_1$ er $z_i = x_i$ og i $\mathcal{V}_{\frac{3}{4}}$ er $z_i = \frac{3}{4}x_i + \frac{1}{4}y_i$).

Et konkret eksempel:

$\mathbb{A}$	sandhed	tro	viden i$\mathcal{V}_1$	viden i $\mathcal{V}_{\frac{3}{4}}$
$\diamondsuit$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0.2500	0.2500
$\heartsuit$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0.5000	0.4375
$\clubsuit$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0.1250	0.1563
$\spadesuit$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0.1250	0.1563

kompleksitetsfunktioner i stokastiske modeller

$\mathbb{A}$	x	y	z	besvær (pris, energi...)
.	.	.	.	.
i	x_i	y_i	$z_i = \pi(x_i, y_i)$	$\phi(x_i, y_i) = z_i\kappa(y_i) = \pi(x_i, y_i)\kappa(y_i)$
.	.	.	.	.

Det totale besvær er $\Phi(x, y) = \sum_{i\in\mathbb{A}} \phi(x_i, y_i)$, dvs.

$$\boxed{\Phi(x, y) = \sum_{i\in\mathbb{A}} \pi(x_i, y_i)\kappa(y_i).}$$

$\kappa : [0, 1] \mapsto [0, \infty]$, er deskriptoren , der til t (sandsynlighed, du tror, et udfald har), angiver dit besvær med at indkredse udfaldet. Sagt positivt: $\kappa(t)$ er den pris , du er villig til at betale for at få information om at en hændelse med sandsynlighed t er indtruffet.

om eksistens af rene kompleksitetsfunktioner

PROBLEM: bestem κ, så Φ bliver en ren kompleksitetsfunktion!

Sætning: For enhver verden $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\pi$ er der masser af acceptable kompleksitetsfunktioner, nemlig svarende til forskellige valg af κ, men højst *eet* valg, der giver en ren kompleksitetsfunktion!

Beviset er lidt omstændeligt. Jeg springer det over!
Iøvrigt gælder, at forskellige verdener godt kan have samme rene kompleksitetsfunktion. Så:

Selvom du kan beskrive verden, behøver du ikke kende verden!

prisen på information i den klassiske verden

I den klassiske verden ser det lidt enklere ud:

$\mathbb{A}$	x	y	z	besvær
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
i	x_i	y_i	$z_i = x_i$	$\phi(x_i, y_i) = z_i\kappa(y_i) = x_i\kappa(y_i)$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Kompleksitetsfunktionen er her $\boxed{\Phi(x, y) = \sum_{i\in\mathbb{A}} x_i\kappa(y_i).}$

Vi søger κ. Vi forventer, at κ er aftagende og at $\kappa(1) = 0$. Desuden vil vi sørge for at $\kappa'(1) = -1$. Dette svarer blot til et valg af enhed . Vores valg giver naturlige enheder, nats. Havde vi valgt normeringen $\kappa'(1) = \ln\frac{1}{2} \approx -0.6931$, havde vi fået binære enheder (bits).

Vi gætter en ren kpl.fkt. i klassiske verden $\mathcal{V}_1$

Skal finde κ, så det for alle sandsynlighedsvektorer x og y gælder, at summen $\Phi(x,x)$ er $\leq$ summen $\Phi(x,y)$, se skema:

$\mathbb{A}$	x	y	bidrag til $\Phi(x,x)$	bidrag til $\Phi(x,y)$
1	x_1	y_1	$x_1\kappa(x_1)$	$x_1\kappa(y_1)$
2	x_2	y_2	$x_2\kappa(x_2)$	$x_2\kappa(y_2)$
.	.	.	.	.
i	x_i	y_i	$x_i\kappa(x_i)$	$x_i\kappa(y_i)$
.	.	.	.	.
sum	1	1	$\Phi(x,x)$	$\Phi(x,y)$

Et trick: Vis i stedet, at
summen $\Phi(x,x)+1$ er $\leq$ summen $\Phi(x,y)+1$,
se skemaet:

$\mathbb{A}$	x	y	bidrag til $\Phi(x,x)+1$	bidrag til $\Phi(x,y)+1$
1	x_1	y_1	$x_1\kappa(x_1)+x_1$	$x_1\kappa(y_1)+y_1$
2	x_2	y_2	$x_2\kappa(x_2)+x_2$	$x_2\kappa(y_2)+y_2$
.	.	.	.	.
i	x_i	y_i	$x_i\kappa(x_i)+x_i$	$x_i\kappa(y_i)+y_i$
.	.	.	.	.
sum	1	1	$\Phi(x,x)+1$	$\Phi(x,y)+1$

Satser på at dette endog gælder "ledvist", dvs. at uligheden

$$s\kappa(s)+s\le s\kappa(t)+t \tag{1}$$

gælder for alle $0\le s\le 1$ og alle $0\le t\le 1$. Hold først s fast. Højre-siden i (1) er en funktion af t med mindsteværdi for $t=s$; derfor er der stationært punkt for $t=s$, dvs. $s\kappa'(s)+1=0$. Dette gælder alle s og bestemmer dermed en differentialligning. Løsningen med $\kappa(1)=0$ er funktionen

$$\kappa(t)=\ln\frac{1}{t}\,.$$

... fortsat ...

Vi har gættet en κ-funktion og dermed en kompleksitetsfunktion! Men er det en ren kompleksitetsfunktion? Vi checker: Er

$$s\kappa(s) + s \leq s\kappa(t) + t \ \ ?$$

– eller: er

$$s \ln \frac{1}{s} + s \leq s \ln \frac{1}{t} + t \ \ ?$$

– eller: er

$$s \ln \frac{t}{s} \leq t - s \ \ ?$$

JA! – det følger af den velkendte ulighed $\ln x \leq x - 1$! Vi konkluderer:

I $\mathcal{V}_1$ er $\kappa :\ t \curvearrowright \ln \frac{1}{t}$ den entydigt bestemte deskriptor, der fører til en ren kompleksitetsfunktion!

DEL III Opgaver til de, der har lyst

Opgave 1:

Diskuter situationer, hvor de opstillede filosofiske betragtninger virker interessante, måske fordi de peger på forhold, du selv har iagttaget. Du bør forholde dig kritisk til de fremførte tanker. Der er masser af spørgsmål, man kan stille, f.eks. omkring begrebet "virkelighed" - findes "virkeligheden" og, i sammenhæng hermed, er der mening i et begreb som den "absolutte sandhed"?
Hvordan passer begreberne sandhed, tro og viden ind i en religiøs kontekst? Er det det rene vås og misforstået videnskabelighed, hvis man prøver at fortolke begreberne i en anden sammenhæng end en rent videnskabelig?
Og, lidt omvendt, kan forhold vi møder som almindelige mennesker hjælpe os, når vi søger efter modeller til forklaring af rent naturvidenskabelige forhold?

Opgave 2: Bestem entropi og divergens i $\mathcal{V}_1$.

Opgave 3: Se på Tsallis verden $\mathcal{V}_q$ med et q mellem 0 og 1 ($0 < q < 1$). Der er kun een ren-kompleksitetsfunktion i denne verden. Bestem den og opskriv en formel for den tilhørende entropi, den såkaldte Tsallis entropi . Vis, at blandt samtlige fordelinger over en endelig mængde, er ligefordelingen den med størst entropi. **Vejledning:** Gå frem helt som i $\mathcal{V}_1$ og gæt dig frem. Tricket, vi så før, fører til differentialligningen

$$s\kappa'(s) + (1-q)\kappa(s) + 1 = 0\,.$$

Du finder let en konstant-funktion κ_0 som løsning og så ses, at er κ en løsning, opfylder funktionen $f = \kappa - \kappa_0$ en noget simplere differentialligning, som du kan løse. Husk så at pil den løsning ud, der opfylder $\kappa(1) = 0$. Du kan stille dig tilfreds med dette, men bør checke, at uligheden $s\kappa(s) + s \leq s\kappa(t) + t$ virkelig er opfyldt. Vedrørende sidste spørgsmål om ligefordelingen: Brug robusthed!
Advarsel: Opgaven er ikke let! Vil du vide mere om Tsallis entropi, spørg evt. Google eller Wikipedia.

Mere information: se min hjemmeside
(søg f.eks. på mit navn i GOOGLE)
SLUT for nu – TAK!