Københavns Universitet
Prøve ved Det naturvidenskabelige Fakultet maj 2015

Analyse 1, Prøve 2

Sættet består af 3 opgaver samt en forside til besvarelsen.

Besvarelsen, der skal udarbejdes individuelt af hver studerende, må højst fylde tre A4-enkeltsider (foruden forsiden). Håndskrift må gerne benyttes når blot den er tydeligt læsbar, og i så fald tillades det at besvarelsen fylder 4 enkeltsider i stedet for 3.

Besvarelsen vil blive bedømt i en skala fra 0 til 10. Bedømmelsen indgår med vægten 10% i den endelige karakter. Ved bedømmelsen lægges der vægt på klar og præcis formulering, og på argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum (også gerne opgaver regnet ved øvelserne).

Besvarelsen skal hæftes i øverste venstre hjørne sammen med forsiden. Aflevering i to eksemplarer på matematisk instituts sekretariat i lokale 04.1.03, senest tirsdag den 19. maj kl. 10:15. Bedømmelsen vil blive indtastet i Absalon, og det rettede eksemplar vil derefter blive returneret ved øvelserne.

Analyse 1, 2015

Prøve 2

De to eksemplarer skal hæftes og afleveres SEPARAT i hver sin bunke

Navn: ____

(NB: Det skal være det navn som du står med i ABSALON)

Hold: ____

(Angiv nummeret på det hold hvortil du ønsker opgaven returneret, uanset om du er opført i ABSALON under et andet hold)

Opgave 1

Betragt funktionsrækken

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{x}{n})$$

for $x > -1$.

(a) Vis at rækken er punktvis konvergent.

(b) Bestem den ledvis differentierede række, og vis at den er uniformt konvergent.

(c) Gør rede for at f er differentiabel. Bestem dernæst $f'(0)$ ved at benytte en formel fra JPS side 37 (formlen kan benyttes uden bevis).

Opgave 2

En talfølge $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ konstrueres ved at vælge en værdi for a_0, og derefter successivt danne de efterfølgende elementer ud fra ligningen

$$a_n = 2 - \frac{1}{2} a_{n-1}$$

for alle $n \geq 1$. Med denne talfølge dannes potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(a) Vælg først $a_0 = \frac{4}{3}$. Vis ved induktion, at da er talfølgen a_n konstant, og bestem derefter potensrækkens konvergensinterval og sumfunktion.

(b) Vælg dernæst $a_0 = \frac{2}{3}$. Vis ved induktion at da er $\frac{2}{3} \leq a_n \leq \frac{5}{3}$ for alle n, og benyt dette til at bestemme potensrækkens konvergensradius.

Opgave 3

Lad M være et metrisk rum med afstandsfunktion d, og lad tre elementer $a, b, c \in M$ være givet. Lad $r, s, t > 0$ være tre positive tal, og antag at $c \in K(b, s)$.

(a) Vis, at hvis $d(a, b) \leq r - s - t$, så er $K(c, t) \subseteq K(a, r)$.

(b) Vis, at hvis $d(a, b) \geq r + s + t$, så er $K(c, t) \cap K(a, r) = \emptyset$.