Københavns Universitet
Prøve ved Det naturvidenskabelige Fakultet maj 2015

Analyse 1, Prøve 1

Sættet består af 3 opgaver samt en forside til besvarelsen.

Besvarelsen, der skal udarbejdes individuelt af hver studerende, må højst fylde tre A4-enkeltsider (foruden forsiden). Håndskrift må gerne benyttes når blot den er tydeligt læsbar, og i så fald tillades det at besvarelsen fylder 4 enkeltsider i stedet for 3.

Besvarelsen vil blive bedømt i en skala fra 0 til 10. Bedømmelsen indgår med vægten 10% i den endelige karakter. Ved bedømmelsen lægges der vægt på klar og præcis formulering, og på argumentation på grundlag af og med henvisning til relevante resultater i pensum (også gerne opgaver regnet ved øvelserne).

Besvarelsen skal hæftes i øverste venstre hjørne sammen med forsiden. Aflevering i to eksemplarer på matematisk instituts sekretariat i lokale 04.1.03, senest tirsdag den 5. maj kl. 10:15. Bedømmelsen vil blive indtastet i Absalon, og det rettede eksemplar vil derefter blive returneret ved øvelserne.

Analyse 1, 2015

Prøve 1

De to eksemplarer skal hæftes og afleveres SEPARAT i hver sin bunke

Navn: ____

(NB: Det skal være det navn som du står med i ABSALON)

Hold: ____

(Angiv nummeret på det hold hvortil du ønsker opgaven returneret, uanset om du er opført i ABSALON under et andet hold)

Opgave 1

Lad $\alpha > 0$ og sæt

$$f(x) = \frac{\ln x}{(x-1)^\alpha}$$

for $x > 1$.

(a) For hvilke værdier af α er $I_1 = \int_2^\infty f(x)\,dx$ konvergent?

(b) For hvilke værdier af α er $I_2 = \int_1^2 f(x)\,dx$ konvergent?

(c) For hvilke værdier af α er $I = \int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergent?

Opgave 2

Lad $0 < a < b$ og betragt funktionsfølgen

$$f_n(x) = \frac{1-(x/b)^n}{1+(a/x)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(a) Først betragtes $x \in [a, b]$. Vis at følgen er punktvis konvergent, og angiv grænsefunktionen. Vis også at funktionsfølgen ikke er uniformt konvergent på dette interval.

(b) Dernæst indskrænkes definitionsmængden til $x \in [a+\epsilon, b-\epsilon]$ hvor $\epsilon > 0$ og det antages at $\epsilon < (b-a)/2$. Bevis at da er funktionsfølgen uniformt konvergent.

Opgave 3

Lad $p, q \in \mathbb{R}$ og betragt rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$$

(a) Vis med sammenligningskriteriet, at hvis $p > 1$ er rækken konvergent for alle q, og hvis $p < 1$ er den divergent for alle q.

(b) Vis med integralkriteriet, at hvis $p = 1$ er rækken konvergent hvis og kun hvis $q > 1$. [Vink: Stamfunktionerne $(\ln x)^{-a}$ og $\ln(\ln x)$ kan benyttes].