CV på WC

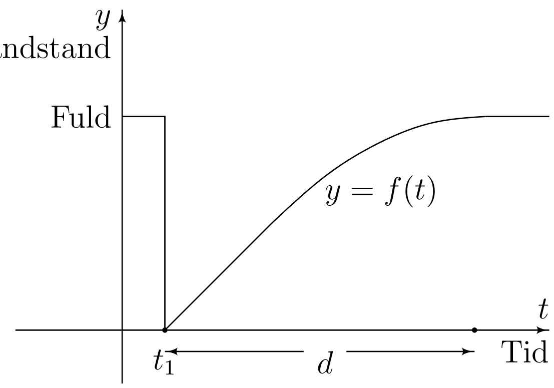
Mogens Esrom Larsen

Enhver Gerning om end nok saa dagligdags, vil altid kunne afvindes en vis Interesse eller drives til en vis Fuldkommenhed; …

Fra Frøken Jensens Kogebog, Forordet, kaldet "Husførelsen" (7. Oplag, 1902).

Lad os iagttage vandstanden i en cisterne på et wc med henblik på en matematisk beskrivelse af dens adfærd. Den typiske hændelse er et pludseligt fald fra fuld til tom, efterfulgt af en fyldning, der begynder med tilstrømning af vand med en konstant hastighed, men slutter med en opbremsning forårsaget af en flyder, der kan lukke for tilstrømningen.

Tømningerne forekommer til forskellige tider, $t_1, t_2, \cdots$ og fyldningen tager ialt tiden d. Tømningerne finder normalt først sted, når cisternen er fuld. Et typisk forløb er angivet på figur 1.



Figur 1

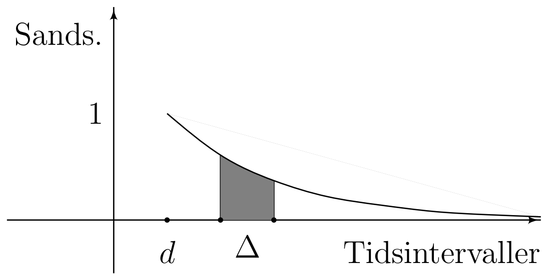
Figuren viser vandhøjden i cisternen som funktion af tiden. Til tiden t_1 tømmes cisternen, hvorefter påfyldningen starter. I begyndelsen med konstant hastighed, men efter en tid sker der en opbremsning forårsaget af en flyder.

Tiderne for tømning er tilfældige i en eller anden forstand. En beskrivelse heraf kan ikke blive en forudsigelse af næste tømning, men de må forventes at blive styret af en eller anden sandsynlighed. Vi vil tænke os, at intervallerne $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ er fordelt med forskellige sandsynligheder, f. eks. sådan at de måske slet ikke forekommer mindre end d, og sådan, at lange intervaller er mindre sandsynlige end korte.

En simpel mulighed for sådan en fordeling kunne være en fordeling med eksponentielt aftagende tæthedsfunktion. Hvis vi kalder sandsynligheden for en hændelse, H, for $P(H)$, kan vi f. eks. tænke os sandsynligheden for hændelsen, at tidsintervallet er mindre end en vis tid, T, er givet som følger:

$$P(\Delta \leq T) = \frac{1}{\lambda} \int_d^T e^{-\lambda(t-d)} dt \quad T \geq d$$

Funktionen under integraltegnet kalde *tætheden* for fordelingen. Den ser ud som en langsomt dalende rejse mod 0.



Figur 2

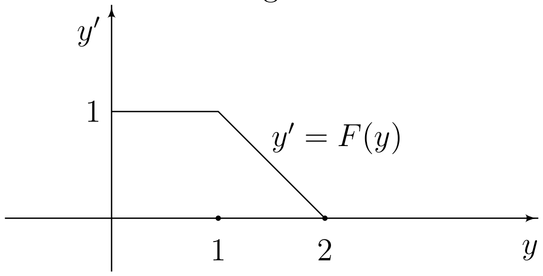
Tætheden beskriver sandsynligheden for tidaintervallerne, Δ_i, på den måde, at sandsynligheden for, at Δ_i ligger i et interval et sted på tidsaksen findes som arealet over dette interval under tætheden.

At korte intervaller har større hyppighed end lange, udtrykkes i folkevisdommen som den advarsel, at ulykker oftest kommer 3 ad gangen.

Men nu til den deterministiske del, påfyldningen. Det ser jo ud som om, hastigheden til dels afhænger af niveauet. I det mindste, når niveauet er kommet over et vist punkt. Sammenhængen mellem hastighed og niveau må kunne udtrykkes i en differentialligning af formen:

$$y' = \frac{dy}{dt} = F(y)$$

hvor $F(y)$ åbenbart er konstant for små værdier af og nul for cisternen helt fuld. Altså noget i denne retning:



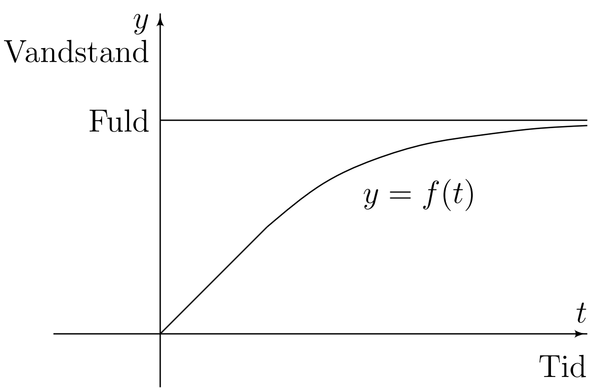
Figur 3

Dette såkaldte fasediagram udtrykker sammenhængen mellem påfyldningshastigheden, y', og vandstanden, y.

Men dette valg er ikke korrekt, thi denne ligning, der f.eks. er

$$\frac{dy}{dt} = F(y) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq y \leq 1, \\ 2 - y, & \text{for } 1 < y \leq 2, \end{cases}$$

har en løsning, der ser ud som følger:



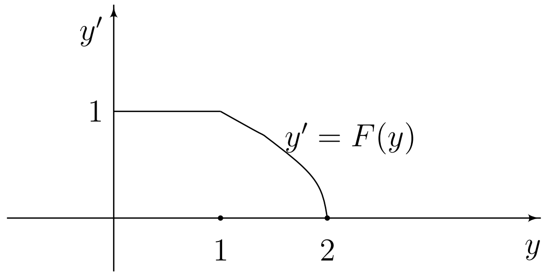
Figur 4

Løsningen til differentialligningen når ikke til en fyldt cisterne i endelig tid, en forhåbentglig urealistisk model.

Den analytiske løsning til eksemplet er jo:

$$y = \begin{cases} t, & \text{for } 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - e^{1-t}, & \text{for } 1 < t. \end{cases}$$

Denne løsning er urealistisk, da den aldrig bliver færdig med at fylde cisternen. I virkelighedens verden bliver cisternen fuld i endelig tid, så løsningen ligner figuren ovenfor. For at dette skal blive tilfældet, må differentialligningen se noget anderledes ud. Den skal have lodret tangent i sit nulpunkt:



Figur 5

Et realistisk fasediagram må have lodret tangent i sit nulpunkt for at løsningerne kan nå et niveau i endelig tid!

F. eks. kunne F være funktionen:

$$\frac{dy}{dt} = F(y) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq y \leq 1, \\ \sqrt{2 - y}, & \text{for } 1 < y \leq 2. \end{cases}$$

Den lodrette tangent betyder, at der ikke gælder entydighed for løsningerne. Alle ender i endelig tid med at tangere den singulære løsning, der er konstant lig med en fuld cisterne, som på den første figur (med $t_1 = 0$):

Løsningen til eksemplet er:

$$y = \begin{cases} t, & \text{for } 0 \leq t \leq 1, \\ 2 - \frac{(3-t)^2}{4}, & \text{for } 1 < t \leq 3, \\ 2, & \text{for } 3 < t. \end{cases}$$