Matematikundervisningen omkring år 1800 f.v.t.

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

De ældste kilder til matematikkens historie dateres til omkring år 1800 f.v.t. De stammer fra to steder i mellemøsten, Babylon og Ægypten. Fra Babylon er bevaret en stor samling soltørrede lertavler med tekster i kileskrift, mens vi fra Ægypten har de to store papyri, Moskva papyrus og Rhind papyrus. Den første er nævnt efter sit nuværende opholdssted, mens den anden er opkaldt efter sin finder, A. Henry Rhind der fandt den i 1858 i Ahmes. Den findes nu i London. Disse tekster er begge ca. 5 m lange og indeholder hhv. 25 og 85 opgaver.

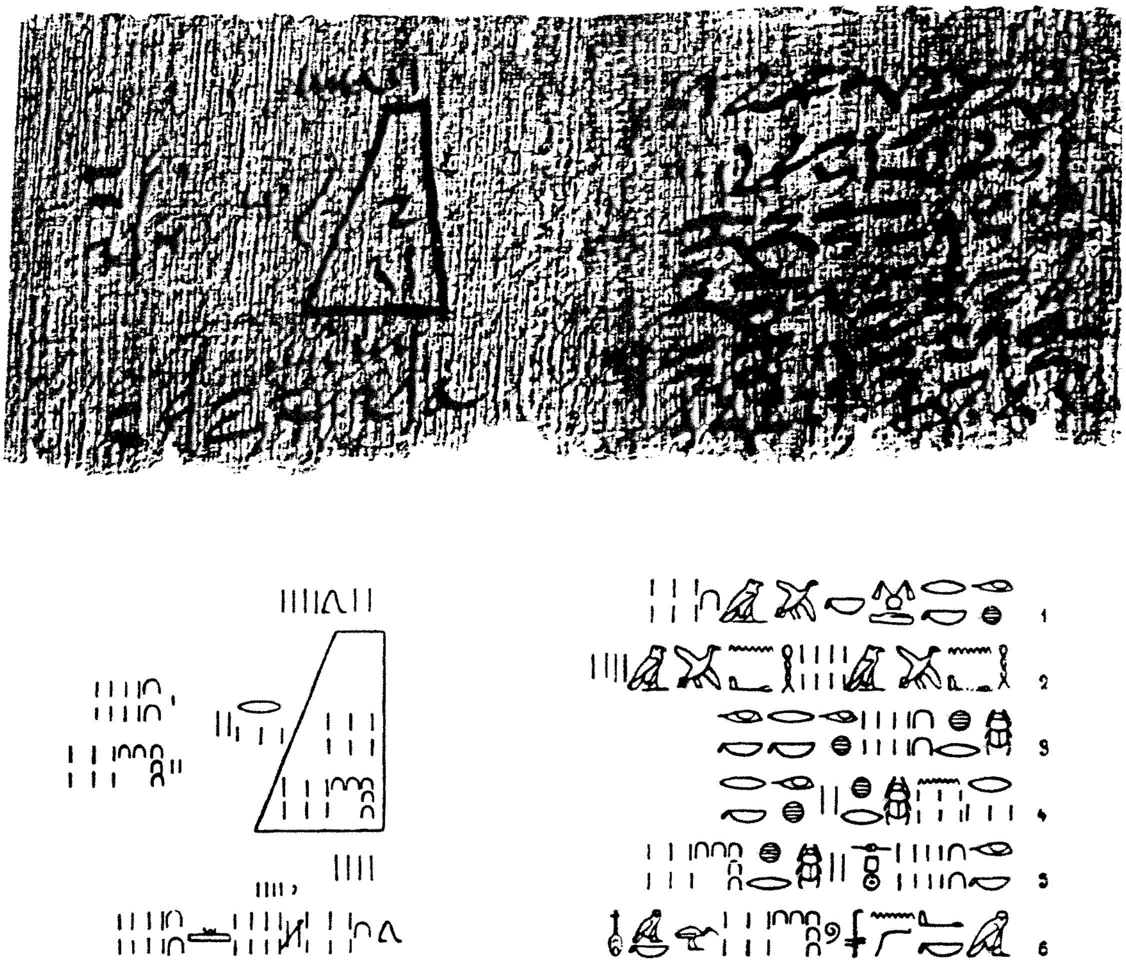
Blandt opgaverne på Moskva papyrus går nr. 14 under kælenævnet "Den største ægyptiske pyramide". Teksten lyder som følger: 6 høj og grundfladen har siden 4, mens topstykket har siden 2, så skal du kvadrere de 4, det bliver 16; du skal gange de 2 med de 4, det er 8; du skal kvadrere de 2, det er 4. Nu skal du lægge de 16, 8 og 4 sammen, det er 28. Nu skal du tage en trediedel af de 6, det er 2. Du skal gange de 28 med de 2, resultatet er 56. Det er sandelig rumfanget af pyramidestubben!

Vi ville sige, at er højden h, siderne af de to kvadrater a og b, så er rumfanget V givet ved formlen:

$$V = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

Selv om man kender formlen for rumfanget af en pyramide — $b = 0$ i formlen ovenfor — er denne formel for stubben ikke helt indlysende.

Ægypternes matematik bar præg af deres uheldige valg af notation. De havde symboler for tallene, 1,2,3,....osv., så langt fantasien rakte. Dertil havde de føjet en række nye symboler, der bestod af en oval oven over et tal. Det var deres betegnelser for de såkaldte stambrøker, dvs. brøker med tælleren 1



Figur 1. Gengivelse af opgave 14 på Moskva papyrus. Den anvendte formel for rumfanget af en pyramidestub, $^1/_3\ h\ (a^2+ab+b^2)$, går under kælenavnet "den største ægyptiske pyramide".

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Denne symbolik gav anledning til en stribe opgaver, vi må anse for mere kuriøse end nyttige. Men for dem var det jo et spørgsmål om at kunne skrive tallene.

Hvis vi betragter en brøk som

$$\frac{2}{97}$$

— 97 er et primtal — så vil vi være tilfredse med den. Men ægypteren ønsker den skrevet som en sum af stambrøker — og den nemme løsning med to ens anser han for grim.

Vi forlænger med et tal, der er større end 49, et godt valg er $8 \cdot 7 = 56$.

$$\frac{2}{92} = \frac{2 \cdot 56}{97 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{97 + 15}{97 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{56} + \frac{15}{97 \cdot 7 \cdot 8}$$

Nu er resten 15, jo netop 7+8, så vi finder videre

$$\frac{2}{92} = \frac{1}{56} + \frac{1}{97 \cdot 7} + \frac{1}{97 \cdot 8} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

Vi finder tabeller over disse omskrivninger, som i bedste fald er underholdende, i værste umuliggør al videre regnearbejde.

Figur 2. Gengivelse af typisk babylonsk reciproktavle fra British Museum. Tavlen er fundet ved Nippur og dateres til ca. 1800. Der indeholder 17 par af et tal og dets inverse. Det skal forstås approximativt: det første par er 2,5 og 28,48; produktet er 59,59. De næste findes ved sukcessiv fordobling og halvering: 4,10 og 14,24 osv.

Babylonerne var heldigere med deres valg af talsymboler. De skrev i kolonner på tavlerne og i hver kolonne et ciffer mellem 0 (tom) og 59. De opdagede, at når de delte et stort tal som 60^3 (= 216000) skrevet 1-0-0 med 2,3,4 osv., så kunne det skrives som 0-30-0, 0-20-0,0-15-0, osv. Så hvis enheden, typisk time eller grad?, blev delt i 60—dele og evt. 3600—dele, minutter og sekunder?, — så kunne man let angive størrelsen af en brøk. Det første problem var $^1/_7$, men man prøvede selvfølgelig og fandt den periodiske hexagesimalfremstilling

$$\frac{1}{7} = 0;8,34,17,8,34,17,\ldots$$

Man har muligvis ikke erkendt den periodiske natur; det er ikke antydet på nogen måde, der er kun givet en tilnærmet værdi af tilfældig længde.

Det er velkendt, at Balylonerne gravede mange kanaler, og deres opgaver er da også ofte grøftegraver—problemer. Med det er ikke et tegn på, at deres matematik var forbundet med anvendelserne. Et af mine yndlingseksempler er tavle nr. 4662 i Yale's Babylonske Samling.

Figur 3. Gengivelse af tavle 4662 fra Yale's Babylonske samling. Denne tavle indeholder flere eksempler på løsning af andengradsligninger. Sådanne tavler er svære at datere, men da inflation var velkendt i Babylon, og da arbejdslønnen ofte indgår i problemerne, giver denne et vink. Man regner med at tavlen er fra ca. 1800.

For at forstå teksten må man kende de babylonske måleenheder:

længde:	1 kùš ('alen')	=	30 šu—si ('fingre')
	1 GAR	=	12 kùš
areal:	1 SAR	=	1 GAR^2
rumfang:	1 SAR	=	1 $GAR^2 \times 1$ kùš = 2;24 $kùš^3$

Teksten på tavlen læses:

Arealet er $7^1/_2$ SAR og rumfanget er 45 SAR. Jeg lagde længden og bredden sammen og fik 6;30 GAR. Hvad er længden, bredden og dybden?

Når du skal regne det ud, skal du tage den reciprokke til $7^1/_2$, arealet, og gange med 45 SAR, rumfanget, og du får 6 kùš, dybden.

Tag det reciprokke af dybden og du får 0;10. Gang 0;10 med 45, rumfanget, og du får 7;30.

Halver længden og bredden, som jeg lagde sammen, og du vil få 3;15. Gang 3;15 med 3:15 og du vil få 10;33,45. Træk 7;30 fra 10;33,45 og du vil få 3;3,45. Tag kvadratroden heraf og du vil få 1;45. Læg 1;45 til og træk 1;45 fra og du vil få længden og bredden, 5 GAR er længden og $1^1/_2$ GAR er bredden.

Tavlen indeholder flere lignende opgaver, men denne er instruktiv. vi kender arealet,

$$l \cdot b = A$$

og vi har summen af længde og bredde:

$$l + b = S$$

Forfatteren foreslår følgende:

$$\frac{l+b}{2} = \frac{S}{2}$$

$$\frac{l^2+b^2+2lb}{4} = \frac{S^2}{4}$$

$$\frac{l^2+b^2+2lb}{4} - lb = \frac{S^2}{4} - A$$

$$\frac{l^2+b^2-2lb}{4} = \frac{S^2}{4} - A$$

$$\frac{l-b}{2} = \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}$$

$$l = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}$$

$$b = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}$$

Babylonerne magtede at løse en andengradsligning med positiv diskriminant.

Men mest bemærkelesværdigt er det forhold, at opgaven stilles som den gør. Man forsøger ikke på nogen måde at fremstille problemet som naturligt eller nyttigt — tværtimod.

Opgaven er et drilleri, — jeg lagde længde og bredde sammen, kan du så finde dem igen? Man har umiddelbart glædet sig over, at man magtede at løse problemet.

Mogens Esrom Larsen er ansat ved Københavns Universitets matematiske institut som lektor. Medlem af redaktionen af KVANT.