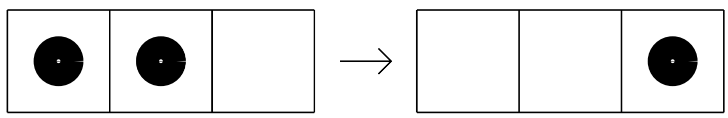
SOLITAIRE
2. juni 2003

Mogens Esrom Larsen

Indledning.

Solitaire spilles med pinde, der på figurerne er angivet som sorte pletter. Der kan stå én eller ingen pind i et felt, som på figuren er angivet som et kvadrat. Reglen er, at en pind kan springe til et tomt felt over én anden pind, som derefter fjernes. Man siger, at den er *slået.*

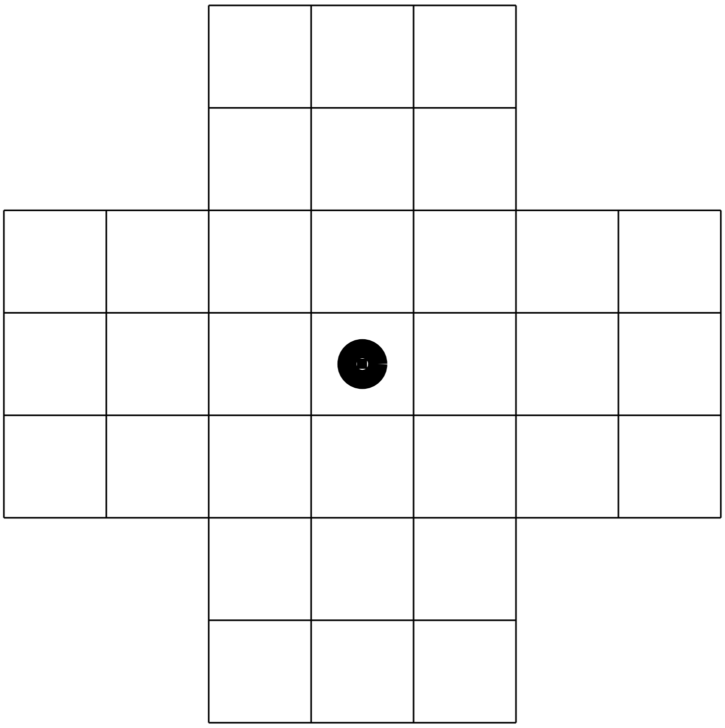


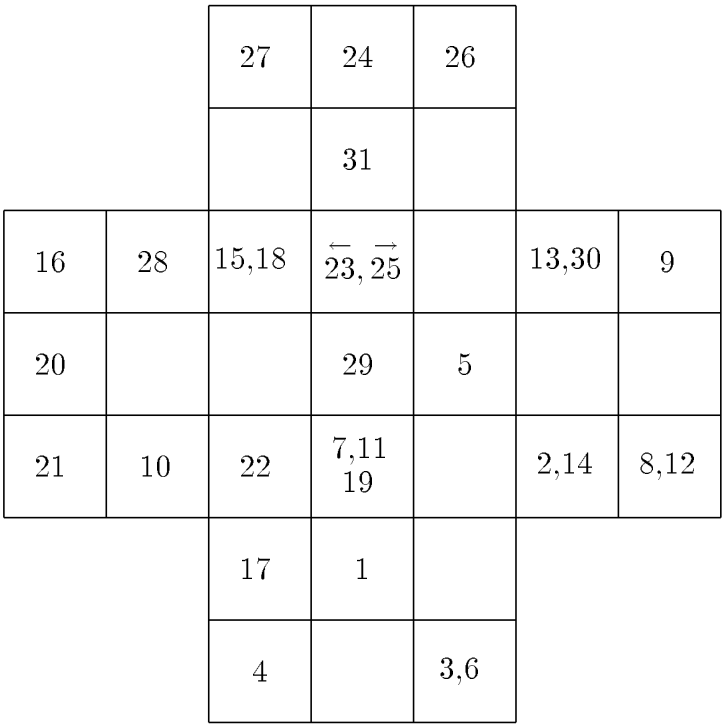
Man ser af figuren at man lige så godt kan bytte om på pinde og huller og spille baglæns. Man kan altså vælge at fylde brættet ud i stedet for at tømme det.

I den klassiske opgave er der givet et mønster, f. eks. et kors, som er fyldt med pinde på nær ét hul, som typisk er valgt i midten. Det gælder så om at slå alle brikker på nær én, som skal stå i midten. Mere generelt kan man vælge sit hul hvor som helst og foreskrive slutpositionen hvor som helst. Det er dog kun et fåtal af disse opgaver, der har en løsning.

I engelsk solitaire er mønsteret et kors som angivet nedenfor. For det gælder den regel, at ligegyldigt hvor man vælger sit starthul, er det muligt at ende med sidste pind der.

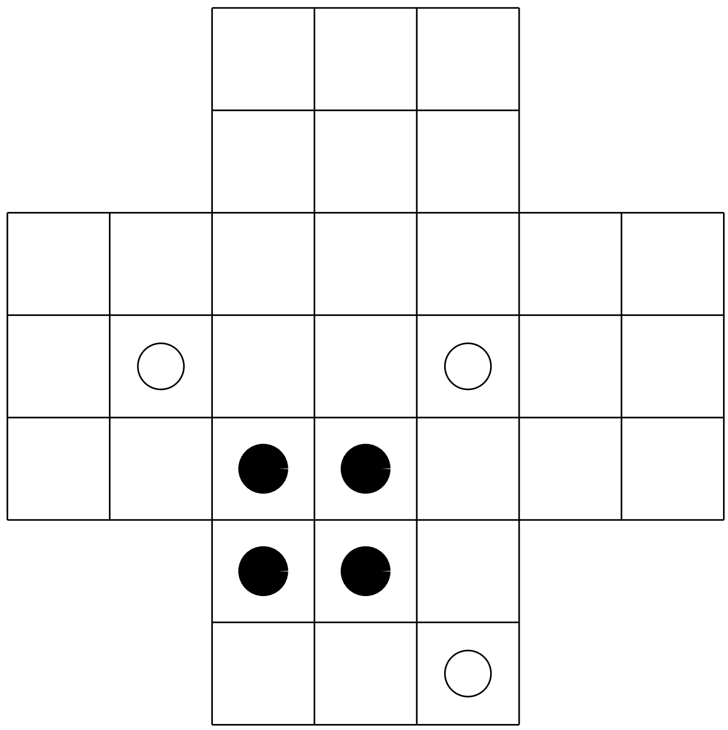
Det er ikke muligt at angive en løsning uden at konstruere den, så jeg giver løsningen på det klassiske engelske solitaire med hul først og pind til sidst i midten ved at give rækkefølgen af slag med et nummer på den pind, der skal slå. Som regel er slaget entydigt bestem herved. Ellers angives med en pil, hvad vej der skal slås.





Man bemærker, at løsningen også kunne bruges til opgaven, der starter med et hul midt på nederste arm og ender med en pind midt på øverste arm.

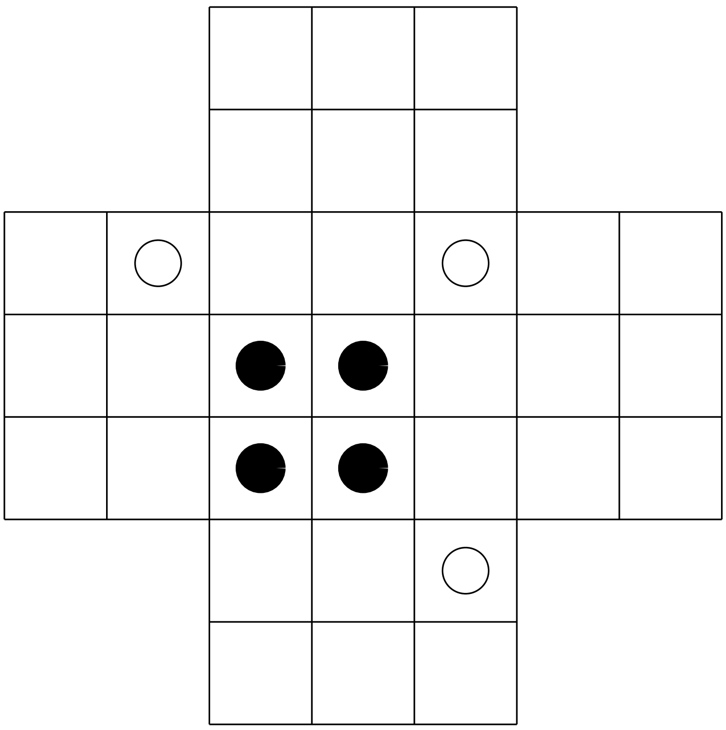
At man kan bruge næsten samme løsning til flere problemer kan i visse andre tilfælde udvides. Starter man med et hul og fortsætter med to nabohuller, så kan man ved at slå parallelt få fire huller i kvadrat. Det samme kvadrat kunne man have opnået med tre andre starthuller. Og ender man med fire pinde i kvadrat, så kan man vælge mellem fire endepunkter. F. eks. opgaverne at begynde og ende med hvert af de tre cirkelmarkerede huller kan løses ved at danne fire huller og senere fire pinde i det viste kvadrat. Der er et par gode eksempler på den teknik. Første eksempel:



En løsning på opgaven kan være som nedenfor:

		18↓	22	15		
				9		
20	17	21	12, $\overleftarrow{19}$ 23		24	10,13
16		8	2	5, 14↑		
7					1,25	11
		4		3,6		

Det andet eksempel er forskudt en tak opad:



En løsning kan være:

		21	16	15		
				9		
24	$\vec{20}, 23$		$\vec{12}$ $\vec{17}, 22$		18	10,13
				$6, 14\uparrow$		
1,25					3,19	11
		2	8			
		5		4,7		

Man bedes lægge mærke til, at det mønster, man ender med, giver valg mellem forskellige slutpositioner med en vis spredning. Det er på ingen måde tilfældigt. Det vil vi se nærmere på.

Vi farver nu felterne diagonalt næsten som et skakbræt, men med tre farver anvendt cyklisk.

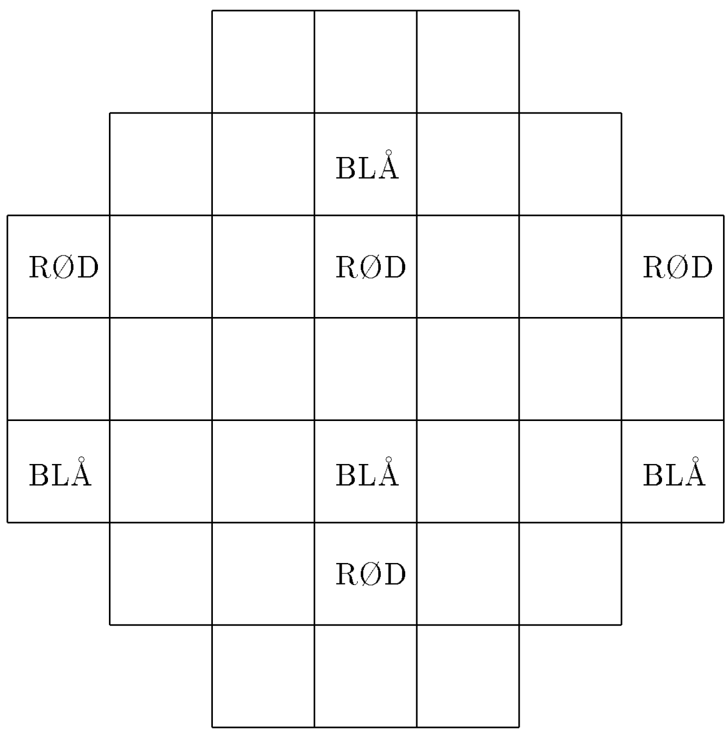
		BLÅ		RØD		
		RØD	BLÅ			
RØD	BLÅ		RØD	BLÅ		RØD
	RØD	BLÅ		RØD	BLÅ	
BLÅ		RØD	BLÅ		RØD	BLÅ
			RØD	BLÅ		
		BLÅ		RØD		

Når man gør et træk, slår en pind, så lægger man mærke til, at der bliver en pind mindre af dem, der står på to af farverne, mens der bliver en pind mere af dem, der står på den tredie farve. Så alle tre antal ændrer paritet, dvs. om de er lige eller ulige. Man kan også sige, at pariteten af de tre differenser mellem de tre antal bevares.

Alene denne simple iagttagelse fortæller os, at vi kun kan ende med én pind, hvis vi starter med forskellige pariteter. Og tilmed at den ene pind, vi forhåbentlig ender med, må have farve som den, der havde et antal pinde med afvigende paritet fra de to andre.

Vi ser straks, at der er lige mange hvide, røde og blå felter på brættet, nemlig 11 af hver. Det betyder, at fjerne vi en pind for at få et starthul, reducerer vi antallet af pinde på den farve med en til 10. Det udelukker, at vi kan ende med en pind af en anden farve. Og da vi jo kunne have farvet diagonalt på den anden led, ser vi at kun huller i det mønster, vi har iagttaget, kan komme på tale. To skridt til siden i en eller anden retning. Derfor kan man højst håbe på at løse 16 opgaver, der er væsentlig forskellige. De kan så til gengæld alle løses. Af disse 16 har vi faktisk vist de 13 ovenfor.

I fransk solitaire er mønsteret et udvidet kors med fire felter lagt til. Man ser straks, at der nu er 13 hvide og 12 af hver af de andre. Det betyder, at fjerner man en hvid, så er der 12 af hver, og det er umuligt at reducere antallet af pinde til et ulige tal, så 2 pinde er man nødt til at akceptere. Men fjerner man en rød pind, så kan man ende med en blå, og omvendt. Da vi igen kan dreje figuren, ser vi, at vi kun kan løse opgaver af denne form: Fjern en af de 4 blå pinde og foreskriv et af de 4 røde felter, hvor vi skal ende med den sidste pind.

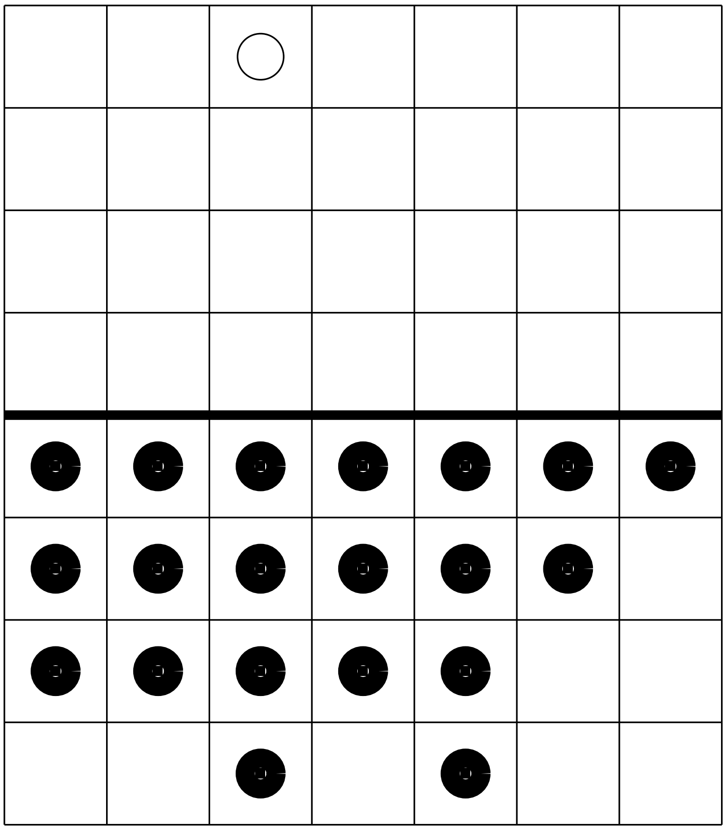


Vælger vi rød og blå yderst til højre, og starter med hullet i rød, så kan vi ende med pinden i blå således:

		15	7,13	11		
	12	22			8	
18	31		$5, 9\uparrow$ 32	1,23		3,6
16		$14\uparrow, 17\uparrow$ $27\downarrow$		10		
21	30		$\overleftarrow{20}$ $\overleftarrow{29}, 33$	35	2	4
	19	26			25	
		28	24	34		

Læg mærke til, at efter 28 træk har vi opnået en figur, hvorfra vi kan ende tre andre steder lige så let.

Når man øver sig med pindene, får man let den tanke, at det er sjovt at prøve at ende så langt væk fra udgangspunktet som muligt. På figuren nedenfor er angivet en hær på 20 pinde, som er opstillet så gunstigt, at det er muligt at ende i feltet, der er markeret med en cirkel.



En løsning på denne opgave følger omstående.

Det bemærkelsesværdige er, at dette er det bedste, vi kan opnå. Det er ikke muligt at nå fem skridt ud fra fronten!

For at overbevise os om denne umulighed, vil vi indføre et potential af en hær. Vi giver hvert felt en værdi på en sådan måde, at når tre felter står på række, lodret eller vandret, så skal værdien i hver ende være højst summen af de to andre værdier. Det kunne være tilfældet, hvis vi gav hvert felt værdien 1. Potentialet af en hær skal så være summen af værdierne fra de felter, som pindene står på.

Fidusen er, at hvis vi foretager et træk, så kan potentialet af hæren ikke øges.

		19				
		9				
2		3,18		4,17		14
11	15	1,6,12		$\overleftarrow{5}$		
8,10			16			
		7		13		

Nu vil vi give alle felter i hele verden en værdi på snedig måde. Vi giver det felt, som vi vil ende i, værdien 1, og de øvrige felter så små værdier som muligt. Dertil skal vi bruge et tal, $\varphi < 1$, som opfylder ligningen $\varphi^2 + \varphi = 1$. Det er nemt at finde, det er jo

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Derefter giver vi naboerne til 1 værdien φ, deres naboer, der ikke allerede har en værdi, værdien φ^2, osv. højere og højere potenser, jo længere vi kommer væk. Og finder vi tre på stribe, så har de typisk værdierne φ^n, φ^{n+1} og φ^{n+2}. Her er den første værdi netop summen af de to andre, mens den sidste er mindre end summen af de to andre.

		1				
		φ				
		φ^2				
		φ^3				
		φ^4				
		φ^5	φ^6	φ^7		
		φ^6				

Nu kan vi jo forsøge at vurdere potentialet af en hær, der står i afstanden 5 fra målet. Det nærmeste felt har værdien φ^5, og harfra aftager værdierne sukcessivt med en faktor φ.

For at få lagt dem sammen, er det smart at erindre det simple regnestykke:

$$\begin{aligned}
&(x-1)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1) = \\
&x^{n+1} + x^n + x^{n-1} + \cdots + x \\
&\qquad - x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1 = x^{n+1} - 1
\end{aligned}$$

som for vort specielle valg af $x = \varphi$ giver vurderingerne

$$\varphi^n + \varphi^{n+1} + \cdots + \varphi^{n+m} = \varphi^n \frac{1 - \varphi^{m+1}}{1 - \varphi} < \frac{\varphi^n}{1 - \varphi} = \varphi^{n-2}$$

Idet vi husker, at $\varphi^2 + \varphi = 1$, så nævneren, $1 - \varphi$, kan erstattes af φ^2.

Vi kan derfor vurdere hver af søjlerne med φ^n, φ^{n-1}, osv., φ^4, φ^3, φ^4, ... φ^n Nu kan vi dele i to summer, en højre og en venstre, hvor den ene starter med 3'die potens, den anden med 4'de. Disse to summer vurderes så ved hhv. φ og φ^2, hvis sum jo er netop 1.

Konklusionen er, at en hvilken som helst hær af pinde bag fronten har et potentiale, der er mindre end 1. Da potentialet ikke kan vokse, er det umuligt at nå frem til den ønskede slutposition, hvor den ene pind jo har potentialet 1.

Ved at kombinere potentialet med farveargumenterne kan man indse, at den viste hær på 20 pinde er minimal for at løse opgaven at nå 4 skridt ud fra fronten.