SIGURDS PROBLEM

Mogens Esrom Larsen
April 15, 2009

Department for Mathematical Sciences
University of Copenhagen

Vis identiteten for $n > 0$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{2n-2i}{n-1}=0$$

Bevis: Vi kan jo ignorere den konstante nævner og skrive summen som

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}[2n-2i]_{n-1}$$

Først bestemmes kvotienten:

$$-\frac{n-i}{i+1}\cdot\frac{[2n-2i-2]_{n-1}}{[2n-2i]_{n-1}}=\frac{\left(\frac{n}{2}-i\right)\left(\frac{n+1}{2}-i\right)}{(-1-i)\left(n-\frac{1}{2}-i\right)}$$

Summen er altså en Chu–Vandermonde med naturlig grænse den hele konstant i tælleren. Vi skriver fikst:

$$\frac{\left(\lceil\frac{n}{2}\rceil-i\right)\left(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\frac{1}{2}-i\right)}{(-1-i)\left(n-\frac{1}{2}-i\right)}$$

Så kan vi skrive den tilsvarende Chu–Vandermonde som

$$\sum_{i=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\binom{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{i}\left[\lfloor\tfrac{n}{2}\rfloor+\tfrac{1}{2}\right]_i\left[-\lfloor\tfrac{n}{2}\rfloor-\tfrac{1}{2}\right]_{\lceil\frac{n}{2}\rceil-i}=[0]_{\lceil\frac{n}{2}\rceil}=0$$

Jvf min nylige lærebog *Summa Summarum,* A K Peters 2007, vi finder Chu–Vandermonde som formel nr. 8.2.