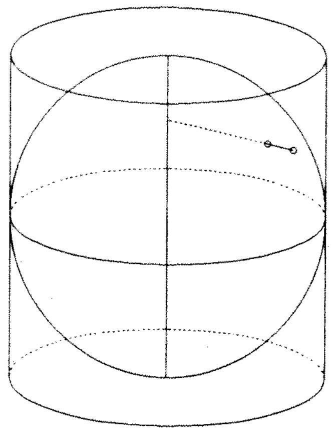
Peters' atlas.

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

Nu skal skyklapperne rives fra vore øjne og vi skal se verden, som den virkelig er, eller i det mindste i rigtige indbyrdes størrelsesforhold. Peters' Atlas[1], påtager sig denne opgave ved at vise os hele jorden i en relativt arealtro projektion. Det skal være bedre end f.eks. den gamle (fra 1569) Mercator-Projektion, der jo tegner lande nær polerne meget for store i forhold til lande nær ækvator. Dette forhold betegnes i forordet som en Europa-centreret tænkemåde, hvad man har vanskeligt ved at forstå, da det mest er Grønland og Alaska, der er overdimensionerede, mens det er landene ved ækvator, der gengives mest "korrekt".

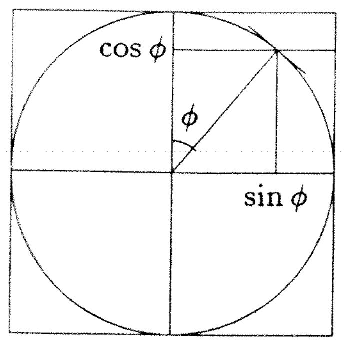


Figur 1. Archimedes cylinder-projektion.

Til det angivne formål bruges to relativt arealtro projektioner, der i indledningen til atlasset kaldes henholdsvis *Peters' projektion* og *en anden projektion.* Det er nu ikke første gang, man har fundet på arealtro projektioner af kugleskallen. De er lige så gamle som selve definitionen af en krum flades areal, og går tilbage til Archimedes († år 212 f.v.t.), som beskrev dem i sit berømte værk, *Kuglen og Cylinderen*[2]. Heri definerer Archimedes arealet af en konveks flade ved at tilnærme den indefra og udefra med konvekse polyedre. Det er ikke så banalt, som det kan lyde. Tænk på, at hvis man tilnærmer en 45° skrå plan med en trappe, så vil arealet af trappen være $\sqrt{2}$ gange for stort, uanset hvor små trinene er. Men en trappe er jo også noget af det mest ukonvekse, man har.

Archimedes beviser ved hjælp af den arealtro projektion, at hele kuglens overflade er lig med cylinderens krumme overflade og derfor $4\pi r^2$. Altså også det samme som af en cirkel med radius lig med kuglens diameter. Hvis vi i det følgende regner afstande i jordradier, altså sætter $r=1$, bliver overfladen som en cirkel med radius 2.

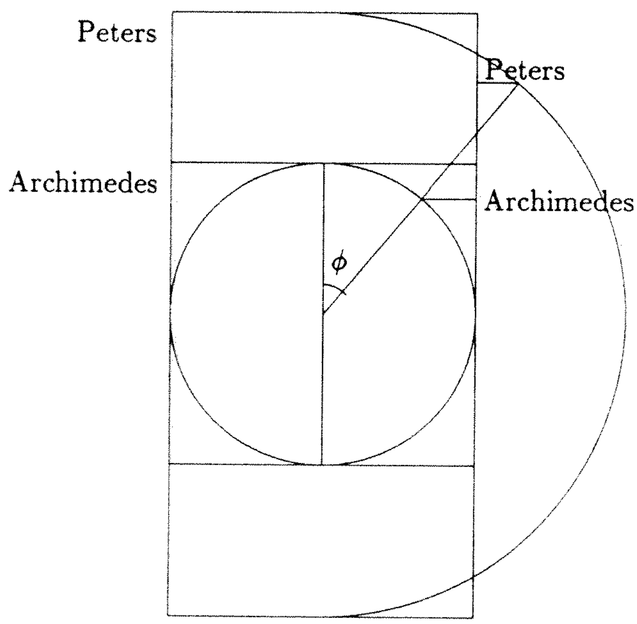
Dette resultat var faktisk det, som Archimedes var mest stolt af. Han skriver i et brev, at "sådan har det været siden tidernes morgen, men jeg er den første, der har vidst det!" Det siges også, at man huggede et billede af en kugle



Figur 2. Archimedes' projektion.

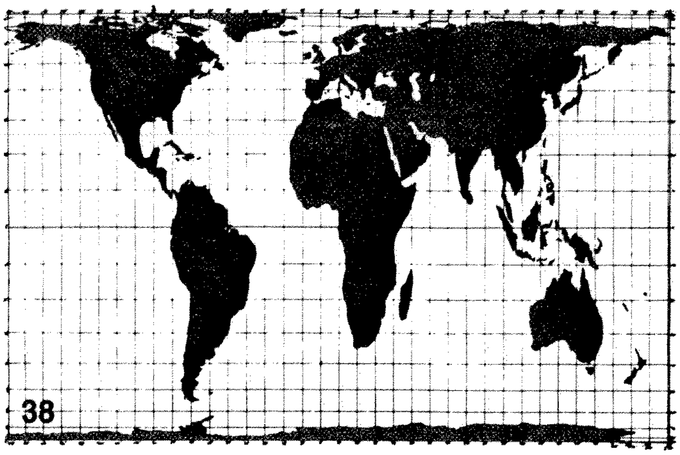
indskrevet i en cylinder på hans gravsten, men det må vist anses for hørende til anekdoternes interessante verden.

Med Peters' variant er denne klassiske projektion kommet til ære og værdighed. Hidtil har den jo været anset for noget kuriøs på grund af den meget kraftige afstandsforvrængning ved polerne. Denne forvrængning har Peters' korrigeret noget ved at gøre kortet smallere og højere, så der både er forvrængning ved ækvator og ved polerne.

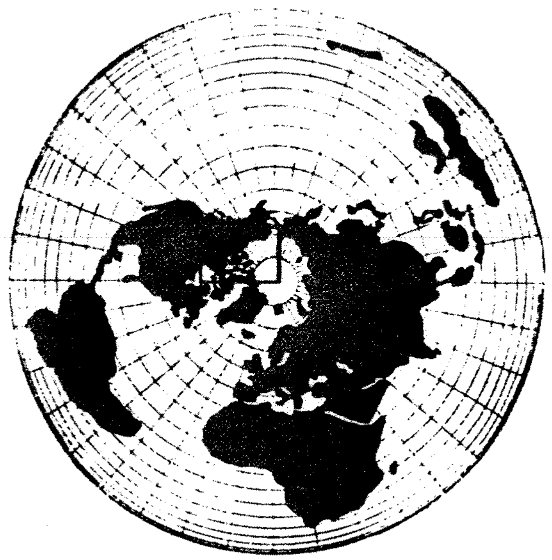


Figur 3. Archimedes' og Peters' projektioner.

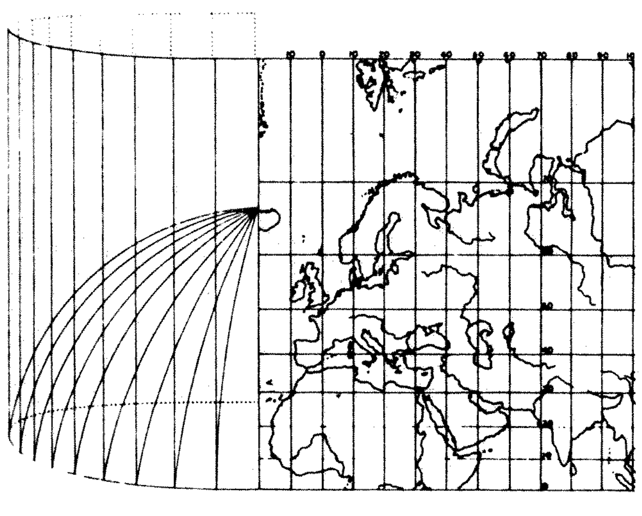
At Archimedes' projektion er arealtro, er ikke så svært at indse. Vi betragter et rektangel på kuglen i et punkt med breddegrad ϕ. Rektanglet har siderne δx i breddecirklens retning og δy i længdecirklens retning. Ved projektionen vil δy i tangentretningen 90° - ϕ blive forkortet med faktoren



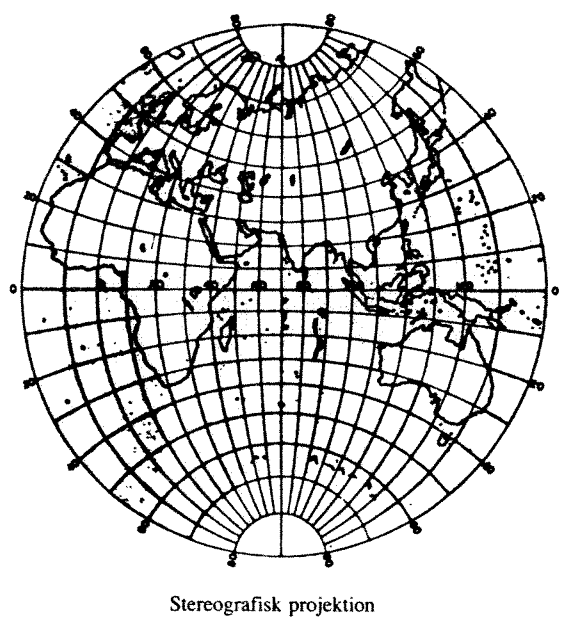
Peters projektion



"Den anden projektion"



Mercators projektion

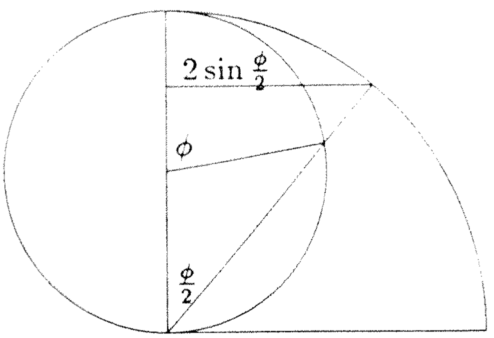


Stereografisk projektion

$\sin(90° - \phi) = \cos\phi$. Til gengæld vil δx blive forlænget med faktoren $1/\cos\phi$, så rektanglets billede bliver et rektangel med siderne $\delta x/\cos\phi$ og $\delta y \times \cos\phi$, og dermed samme areal.

Forvrængningen ved projektionen er den faktor, bredden bliver forstørret med i forhold til længden, altså $1/\cos^2\phi$. Den er altså korrekt ved ækvator. Arno Peters' projektion korrigerer Archimedes' med faktoren 2, man kan sige, at han projicerer på en dobbelt så høj cylinder, så et punkt med breddegrad ϕ afbildes i et punkt på cylinderen med højden $2\cos\phi$ over ækvator. Derved bliver forvrængningen $\frac{1}{2\cos^2\phi}$, som netop er 1, når $\phi = 45°$, altså i Bordeaux og Torino, men naturligvis også andre steder, f.eks. Minneapolis og Montréal. Så de bedst gengivne lande er Schweiz og Østrig.

Når nu kuglefladen har arealet 4π, er det nærliggende at projicere den på en cirkel med radius 2 efter princippet, at Nordpolen placeres i centrum og længdecirklerne projiceres i radier med samme indbyrdes vinkler som disse i Nordpolen, mens alle breddecirklerne projiceres i koncentriske cirkler, sådan at hver cirkels areal svarer til arealet af den



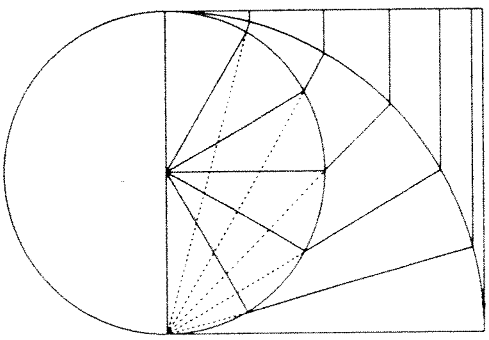
Figur 4. Konstruktion af 2 sin $\frac{\phi}{2}$ til arealtro cirkel-projektion.

tilsvarende kalot på kuglen. Sydpolen må så fordeles over cirklen med radius 2. Det er denne projektion, atlasset betegner som "en anden". Nu er det en simpel sag for os at beregne denne projektion, fordi vi nu ved, at når vinkelen med Nordpolen er ϕ, så vil den tilsvarende kalot have samme areal som det tilsvarende stykke af cylinderen. Og det er jo omkredsen af cylinderen (2π) ganget med højden ($1-\cos\phi$). Cirklen med dette areal har radius

$$\sqrt{2(1-\cos\phi)} = 2\sin\frac{\phi}{2}$$

Figur 4 viser hvorledes 2 sin $\phi/2$ fremkommer geometrisk.

Denne projektion giver et rimeligt billede af den nordlige halvkugle, men breddecirklerne på den sydlige kommer til at ligge meget tæt. Så allerede Australien kommer til at se lige så fladtrykt ud som Grønland på Archimedes' cylinderprojektion.



Figur 5. Arealtro cirkel-projektion.

Bortset fra den smukke geometri, der ligger bag disse arealtro projektioner, er det så lykken at erstatte de gamle kort med de nye? Svaret er, at et godt kort må have et formål. Hvis man vil gengive kuglefladen så uforvrænget som muligt, så skal projektionen være vinkeltro. Dette krav er opfyldt af de to typer kort, som bruges af "professionelle" navigatører til vands og i luften.

Til søs har man siden 1569 brugt og påskønnet Mercators projektion, fordi den foruden at være vinkeltro har den egenskab, at kurver på havet med fast kurs, såkaldte loxodromer, er rette linier. Det betyder, at man med en lineal kan afstikke sin kurs eller omvendt se, hvor man havner. Her kommer Archimedes' og Peters' projektioner til kort, og en sømand er vel lidt ligeglad med, om Barentshavet er større eller mindre end Middelhavet i areal.

I luften er man ikke længere tilfreds med loxodromerne, fordi de ikke er de korteste ruter, de såkaldte geodæter. En tur til Amerika stik vest fra Plymouth er en omvej. Man ønsker sig derfor et kort, hvorpå det er nemt at tegne geodæterne. Det er faktisk sådan, at der findes en projektion, den såkaldt gnomoniske, som netop har alle geodæter som de rette linier. Men den kan kun afbilde en mindre del af jordoverfladen af gangen, så da problemet er mest relevant på store afstande, foretrækker man i stedet for den stereografiske projektion. Denne tillader dels afbildning af så stor en del af jordoverfladen, man vil, dels afbilder geodæterne i visse cirkelbuer, man let kan tegne, se ref. 3. Også på dette punkt trækker Archimedes' og Peters' projektioner de korteste strå; - en luftkaptajn er vist kun interesseret i landenes arealer, hvis de skal oversprøjtes med pesticider. Normalt er det mest interessant, om landet ser ud som Chile eller Columbia, men for eksempel på "den anden projektion" er disse lande ens, begge nærmest cirkelrunde.

Referencer.

1. Arno Peters, *Politikens Store Verdensatlas: Peters' Atlas*, Politikens Forlag, Oldenburg, 1990.
2. Archimède, Περι σφαιρασ και κυλινδρου *(De la Sphère et du Cylindre)*, Société d'édition "les belles lettres", Paris, 1970
3. Mogens Esrom Larsen, *Den korteste vej mellem to punkter på et landkort*, Naturens Verden **5-6**, 191 (1984)

Mogens Esrom Larsen redaktør af KVANT. Lektor ved Københavns Universitets matematiske institut.