Assyrien

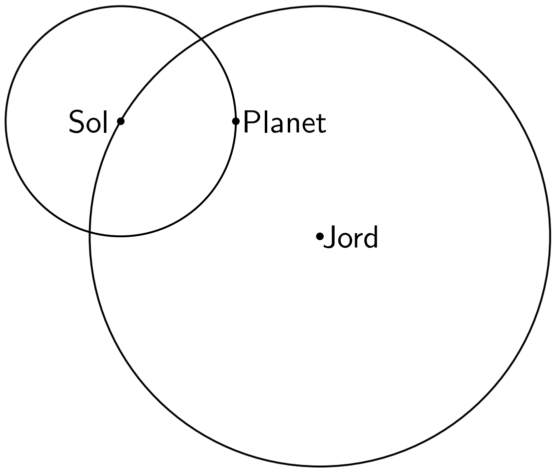
I begyndelsen var iagttagelsen. De ældste overleverede matematiske tekster er assyriske fra et par tusind år før vor tidsregning. I de samtidige kulturer i Ægypten og Kina benyttede man brændbare materialer, mens man i Assyrien lavede aftryk i våd ler med små kiler. Selv om en tavle kunne genbruges og ofte blev det, så var dette materiale arkæologernes held. Hver gang et hus brændte, blev de tilfældige optegnelser forevigede. Assyreren måtte så skaffe sig nye lertavler til sin ærgrelse og vores fordel.
Assyrien var et regnfattigt land, tænk bare på Hammurapis' (1792–50) berømte love om reglerne for brug og misbrug af vandingsanlæg. Men til gengæld var og er klimaet gunstigt for iagttagelse af himmellegemernes færd. Man opdagede korte og lange perioder, og at de fleste stjerner bevæger sig i parallelle baner i en døgnrytme, der langsomt ændres med årstiderne. Det kunne ligefrem være praktisk nyttigt; Vi læser, at når Plejaderne ses om foråret første gang, så er tiden inde til at så korn.

Planeterne

Men syv himmellegemer skiller sig ud, sol og måne og de fem "vagabonder" – planeterne. De sidste følger ikke fixstjernerne, men løber somme tider i forvejen, og snart efter tilbage igen i modsat retning. Man anså disse syv for virkelige guder og deres løben frem og tilbage som varsler. Planeterne bærer stadig gudenavne, men nu romerske, Venus, Mars, Jupiter osv.
På den tid tænkte man ikke i modellen "årsag–virkning", men snarere "varsel–begivenhed". Hændelser var forudbestemt af guderne, men efter advarslen kunne de påvirkes efter anmodning.
Perioderne tillod de lærde at forudse visse begivenheder som fx. måneformørkelser, hvilket nok har virket imponerende. Når kongen efter en heldig forudsigelse så spurgte de lærde om andre varsler, så havde de et problem. Hvad enten de nægtede eller tog fejl, var resultatet det samme: Umiddelbar henrettelse. Intet nyt under solen, var der ikke for nylig et forslag i et åndeligt u–land (Rusland) om at straffe meteorologerne for forkerte vejrudsigter?

Astronomi

De græske astronomer var ikke tilfredse med gudernes viljer. De lavede en veritabel matematisk model for planeternes vagabondering. De forestillede sig jordkloden som en kugle, fixstjernerne som lys på en sfære langt uden om og planeternes baner givet som såkaldte epicykler, dvs. små cirkulære baner, hvis centrer bevæger sig i en større cirkel rundt om jorden. Aristarkos fra Samos(3. årh. fvt.), med tilnavnet "mathematikos" – den alvidende – havde i sin model solen i centrum for alle planeternes små cirkler. (Det er vist nok første anvendelse af ordet "mathematik" i noget, der ligner vores forstand.)

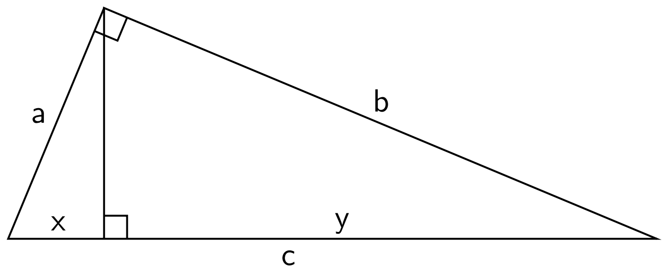


Hexagesimalerne

Assyrerne brugte også tal til at notere stjerners og planeters positioner, De opfandt positionssystemet med grundtal 60, delte omkredsen i 360 grader, og angav positionerne med en nøjagtighed på to hexagesimaler, Så en grad deltes i (vore dages) 60 bueminutter (de små) og hver af dem i 60 buesekunder (de anden små). Da disse tabeller nåede grækerne, som ikke brugte et positionssystem, blev disse små enheder bevaret og blot skrevet med græske hele tal. Positionen af en stjerne blev altså angivet med tre heltal, grader, minutter og sekunder, de sidste mellem 0 og 59. Da de ikke havde et symbol for nul, valgte Ptolemaios (2. årh.) for ikke at forveksle sekunder med minutter i tilfælde af 0 minutter, at skrive det meningsløse tal 70 for minutterne. Da grækerne brugt alphabetet til tal også, α=1, β=2, osv. var symbolet for 70 tilfældigvis omikron, o.

Pythagoras i Assyrien

Assyrerne kendte denne sætning, – ikke overraskende. den følger let ved betragtning af tre ensvinklede trekanter:

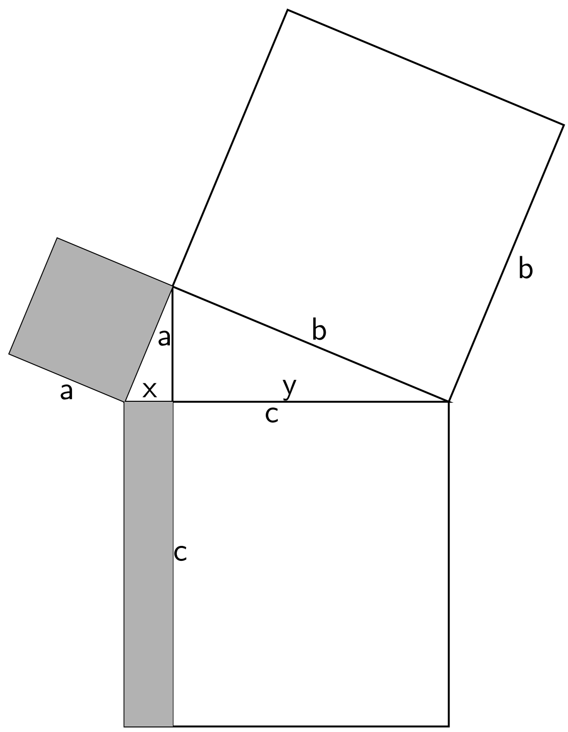


Højden deler trekanten i to mindre, der begge er ensvinklede med den oprindelige. Det giver forholdene:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c} \qquad \frac{y}{b} = \frac{b}{c}$$

Disse ligninger kan forstås som ligheder mellem nogle kvadrater og rektangler

$$a^2 = c \times x \qquad b^2 = c \times y$$



Plimpton 322

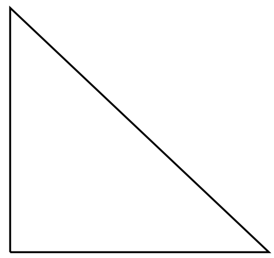
Vi finder tabeller over pythagoræiske tripler

$$\{(A, B, C) \in \mathbb{Z} | a^2 + b^2 = c^2\}$$

Fx

$$(3,4,5),(5,12,13),\cdots,(13500,12709,18541)$$

Den sidste ser sådan ud



ikke helt ligebenet!

Hvorfor ikke en løsning af formen

$$x^2 + x^2 = y^2$$

med naturlige (hele positive) tal?

Hvis vi har løsninger, så findes en løsning, hvor y er mindst. Men så har x og y ingen fælles faktorer, så da y må være et lige tal, kan vi skrive $y = 2z$. Men så er jo

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 4z^2 \\ x^2 &= 2z^2 \\ 2z^2 &= x^2 \end{aligned}$$

hvor åbenbart $x < y$. En umulighed.

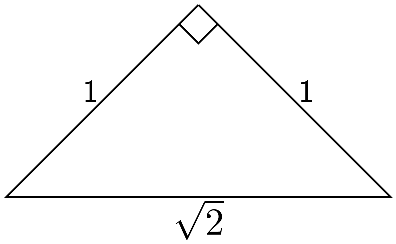
Det var en kendsgerning, der ikke huede Pythagoras, der helst beskrev alt med rationale tal.

Konklusion: Tallene slår ikke til!

Pythagoras i Italien

Ude af stand til at finde en ligebenet retvinklet trekant med heltallige sider bandlyste pythagoræerne tallene og erstattede dem med fysiske størrelser.

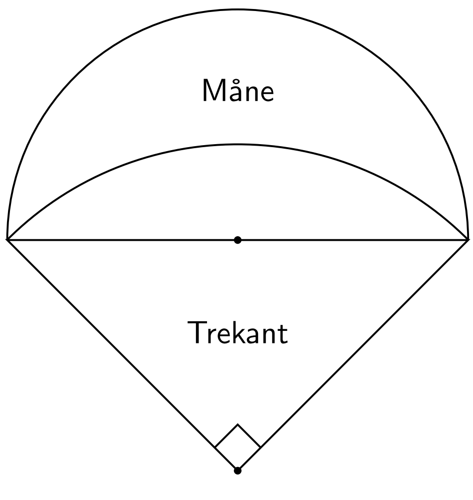
De kunne jo sagtens konstruere en sådan trekant med kateterne af længde 1 og hypothenuse ($\sqrt{2}$):



Disse iagttagelser fik grækerne til udvikle geometrien til beskrivelse af rummet uafhængigt af tallene. De arbejdede direkte med figurerne i 1, 2 eller 3 dimensioner.
Det lykkedes at definere et lighedsbegreb, der udtrykte at figurer havde samme areal eller samme rumfang, uden at disse størrelser blev udregnet som tal.
Grækernes geometri sammenlignede figurer med figurer og undgik tal. De stillede visse krav – på græsk "axiom", – som skulle afspejle den geometriske praksis, at tegne med passer og lineal. fx. axiomerne, at gennem to punkter går der en ret linie, og givet to punkter, så er der en cirkel gennem det ene og med det andet som centrum.
Med disse forudsætninger udledte man alle de logiske konsekvenser, man havde fantasi til og udviklede på denne måde det første eksempel på en matematik, – dvs. en teori, der er logisk konsistent. Verdens første matematiske model af et fysisk fænomen, det rum vi lever i.

Hippokrates' måne

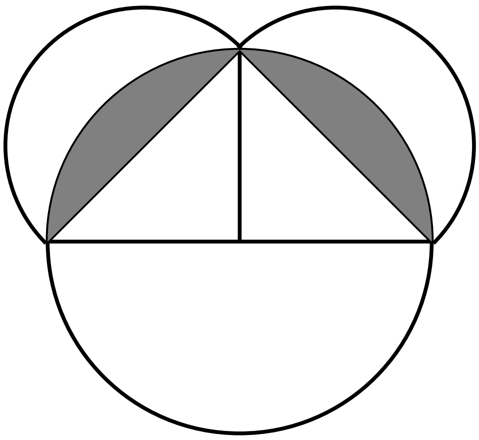
De kunne fx. bevise, at Hippokrates' (5. årh. fvt.) måne er lige så stor som en vis ligebenet og retvinklet trekant. Man kan kalde det "månens kvadratur."



Har trekanten katete 1 og dermed efter vores mening hypotenuse $\sqrt{2}$ og areal $\frac{1}{2}$, Så er månen tegnet af to cirkelbuer med radierne 1 og $\frac{\sqrt{2}}{2}$ og centrum i trekantens toppunkt og hypotenusens midtpunkt hhv. Denne måne har altså også arealet $\frac{1}{2}$.

Bevis:

I figuren nedenfor er den store halvcirkel lig med summen af de to små halvcirkler, fordi de er proportionale med Pythagoras' kvadrater.



Nu er trekanten lig med den store halvcirkel minus de to grå arealer, Men det bliver det samme som de to små halvcirkler minus de to grå arealer.

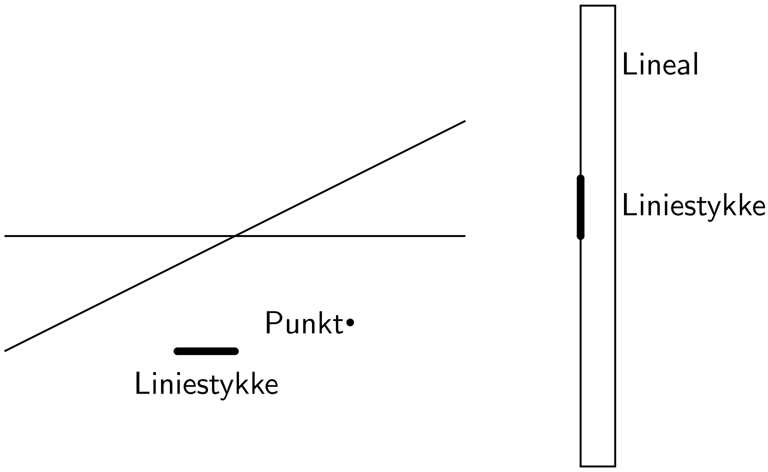
Ved at dele figuren i halve fås det ønskede resultat. (At forvandle trekanten til et kvadrat er trivielt.)

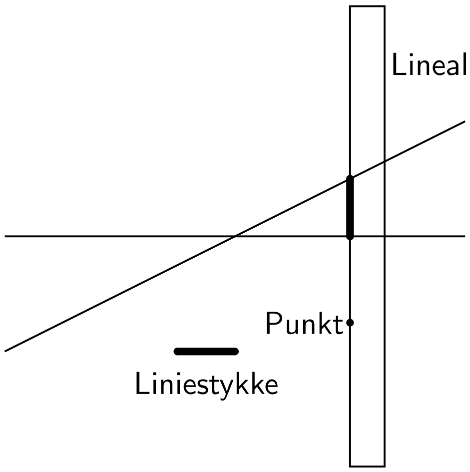
Fysisk tegning

Man tegnede med de to meget nærliggende hjælpemidler, passeren, der kan tegne cirkler, og linealen, der kan tegne rette linier. Før Euklid brugte man dem, som fantasien tillod:

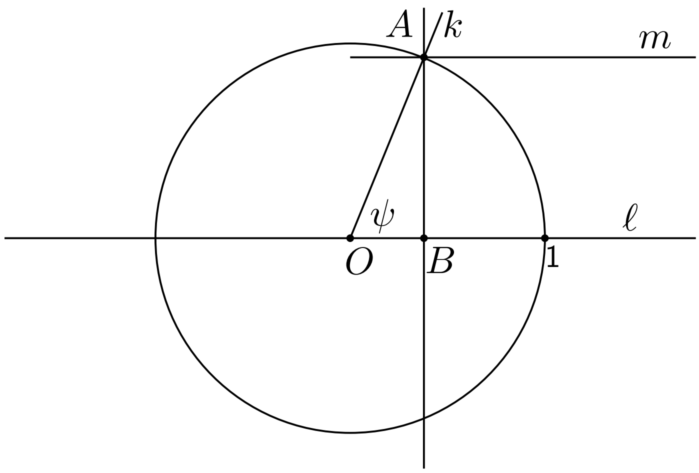
Indskydning

Givet to skærende linier, et punkt og et liniestykke, kan vi tegne en linie genner punktet sådan, at de givne linier skærer et liniestykke af den tegnede af den foreskrevne længde:



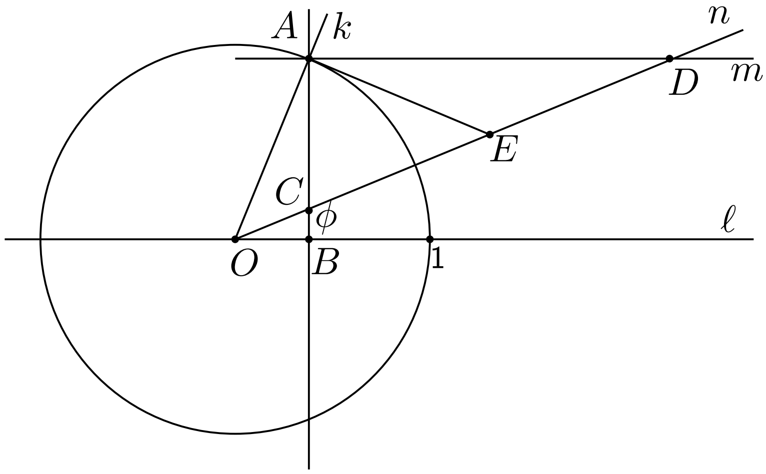


Vinklens tredeling



Vi ønsker at tredele vinklen $\angle\psi$ mellem linierne ℓ og k. Vi tegner cirklen med centrum i 0 og radius 1 på ℓ, Den skærer linien k i punktet A. Derefter tegnes AB vinkelret på ℓ. Endelig tegnes linien m gennem A parallel med ℓ.

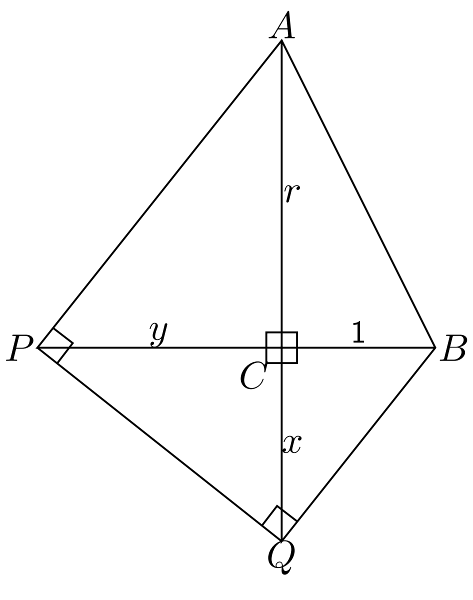
Vi foretager nu i henhold til metoden ovenfor en indskydning, dvs. vi tegner gennem 0 linien n, der skærer AB i C og m i D, så afstanden $CD = 2$.



E afsættes som midtpunktet af liniestykket CD. Da $\triangle ACD$ er retvinklet med $\angle A$ som den rette, ser vi, at en cirkel med centrum i E og radius 1 vil gå gennem A, C og D. Altså er $AE = CE = DE = 1$ og derfor $\triangle AED$ ligebenet, så vi ser, at $\angle DAE = \angle ADE = \angle COB = \phi$. Da $\triangle OAE$ også er ligebenet, er $\angle AOC = \angle AEC = \angle EAD + \angle ADE = 2\phi$. Vi har tredelt vinkelen $\angle AOB = \psi$.
Denne metode har være kendt siden det 5. århundrede fvt.

Terningens fordobling

Eftersom vi let kunne tegne et liniestykke af længde $\sqrt{2}$, dvs. siden i et kvadrat af dobbelt størrelse, er det nærliggende at søge siden i en terning af dobbelt størrelse, altså et liniestykke af længde $\sqrt[3]{2}$.
Dette er umuligt i den euklidiske geometri, men let med fysiske tegneredskaber. vi generalisere tallet 2 til et vilkårligt tal, r:



Givet en retvinklet trekant, $\triangle ABC$ med kateterne 1 og r, tegner vi punkterne P og Q på kateternes forlængelser ud over den rette vinkel C, sådan at de to vinkler er rette: $\angle APQ = \angle PQB = \frac{\pi}{2}$. Derved opstår tre ret- og ensvinklede trekanter:

$$\triangle ACP \sim \triangle PCQ \sim \triangle QCB$$

Altså har vi

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{y} = \frac{1}{x}$$

hvoraf vi får

$$y^2 = rx \quad \wedge \quad x^2 = y \quad \Rightarrow \quad x^4 = y^2 = rx$$

hvilket viser, at liniestykket x løser problemet,

$$x^3 = r$$

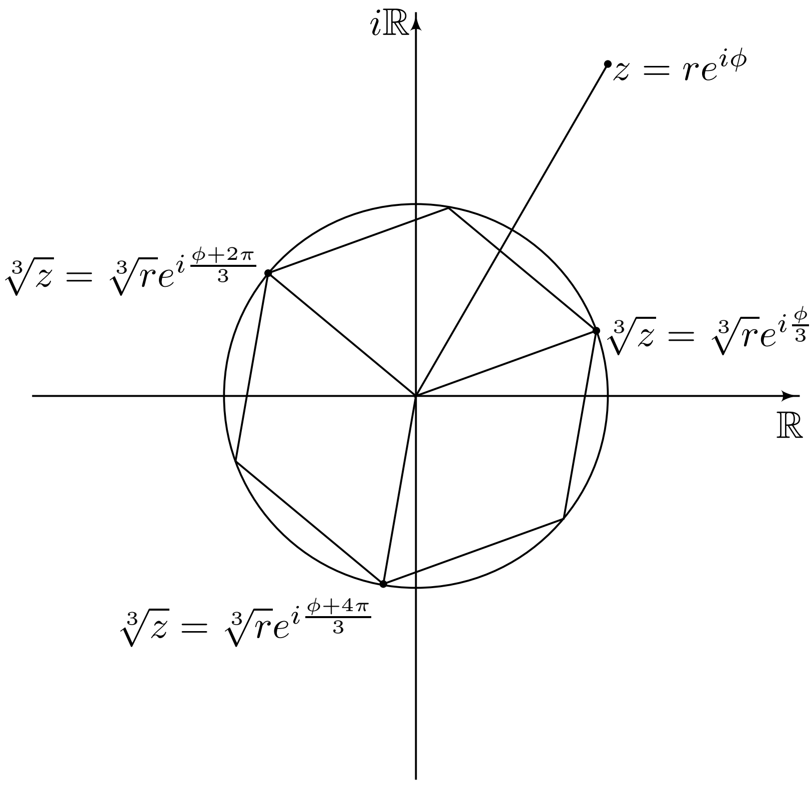
Figuren kan tegnes med to snedkervinkler.

Den komplekse tredierod

Disse to konstruktioner tillader os præcis at konstruere en vilkårlig kompleks tredierod. som en vektor i planen er det komplekse tal givet ved en længde og en vinkel:

$$re^{i\phi}$$

Så tredieroden kan konstrueres ved at tegne de to størrelser $\sqrt[3]{r}$ og $\frac{\phi}{3}$. At tilføje vinklerne $\frac{2\pi}{3}$ OG $\frac{4\pi}{3}$ er let:



Den komplekse trediegradsligning

Denne konstruktion tillader os at konstruere løsningen til en vilkårlig kompleks trediegradsligning.

Vi følger Francis Vieta (1540–1603). Antag, at vi har en trediegradsligning (dvs. med $A \neq 0$):

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

Så kan vi dele med A og skrive

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Vi skifter variable til $y = x - \frac{b}{3}$ for at slippe for andengradsleddet

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right) y + d + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} = 0$$

eller simpelthen

$$y^3 + ey + f = 0$$

Nu skriver vi $y = p + q$, p og q til senere præcisering. Vi får

$$p^3 + q^3 + 3pq(p+q) + e(p+q) + f = 0$$

Det ses, at hvis vi vælger p og q, så de løser ligningerne

$$3pq + e = 0$$
$$p^3 + q^3 + f = 0$$

så har vi en løsning $y = p + q$.

For at finde dem betragter vi p^3 OG q^3, som tilfredsstiller

$$p^3 q^3 = -\frac{e^3}{27}$$
$$p^3 + q^3 = -f$$

De løser altså en andengradsligning, så de må være

$$\frac{-f \pm \sqrt{f^2 + 4\frac{e^3}{27}}}{2}$$

der alle kan konstrueres som komplekse vektorer.

Alt, hvad vi nu behøver, er at konsruere deres komplekse tredierødder, Netop som vi lige har lært!

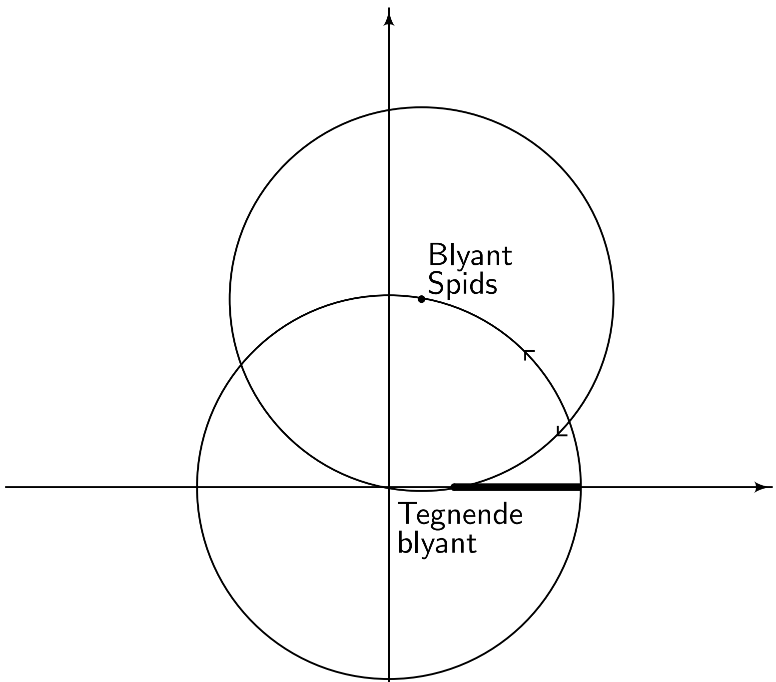
Husk at finde alle 3 komplekse rødder også af eventuelle reelle størrelser. og at vi får alt for mange kandidater, så man må gøre prøve!

Euklid og Georg Mohr

Usikkerheden om linealens korrekte brug kunne have været undgået!

Georg Mohr (1640–97) viste i 1672 at ethvert punkt, som kan konstrueres med passer og lineal, kan konstrueres med passeren alene.

Fysisk tænkt er dette resultat ikke overraskende. Forestil jer en dobbelt passer med samme radius, den ene med spidsen sat på den andens blyantspids, og lad dem bevæge sig med samme hastighed og modsat omløbsretning.



Bevis: I kompleks notation parametriceres kurven som

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos t \in \mathbb{R}$$

Euklids 5. bog – størrelseslæren

Relationen:

$$A : B = C : D \quad \Leftrightarrow \quad A : C = B : D$$

synes triviel, fordi vi har det indlysende bevis:

$$B \cdot C = A \cdot D = C \cdot B$$

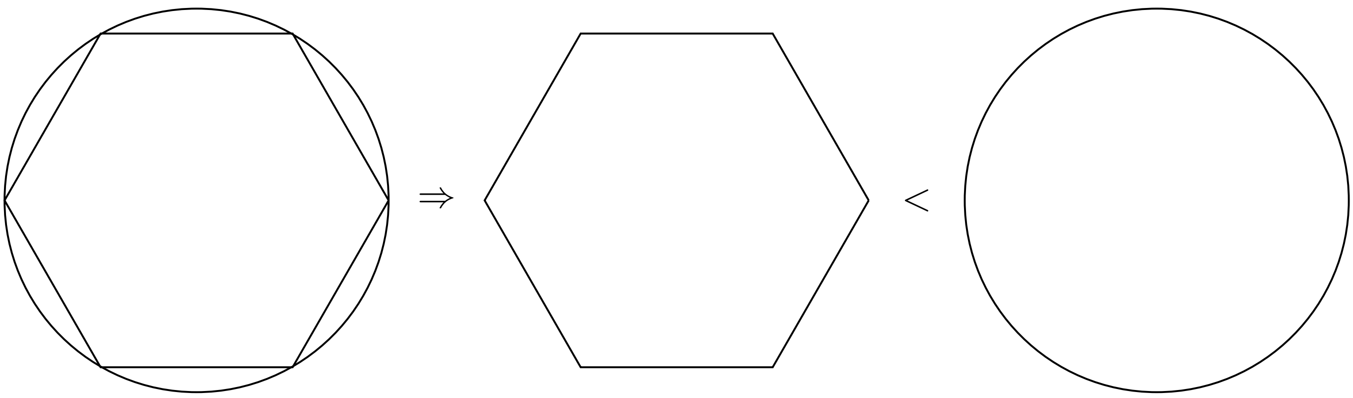
Ja, det er fint for liniestykker, en ligning mellem rektangler.

Men euklids sætning (16) gælder også for plane og rumlige figurer, og det 4– eller fler–dimensionale volumen blev ikke betragtet!

Archimedes' størrelseslære

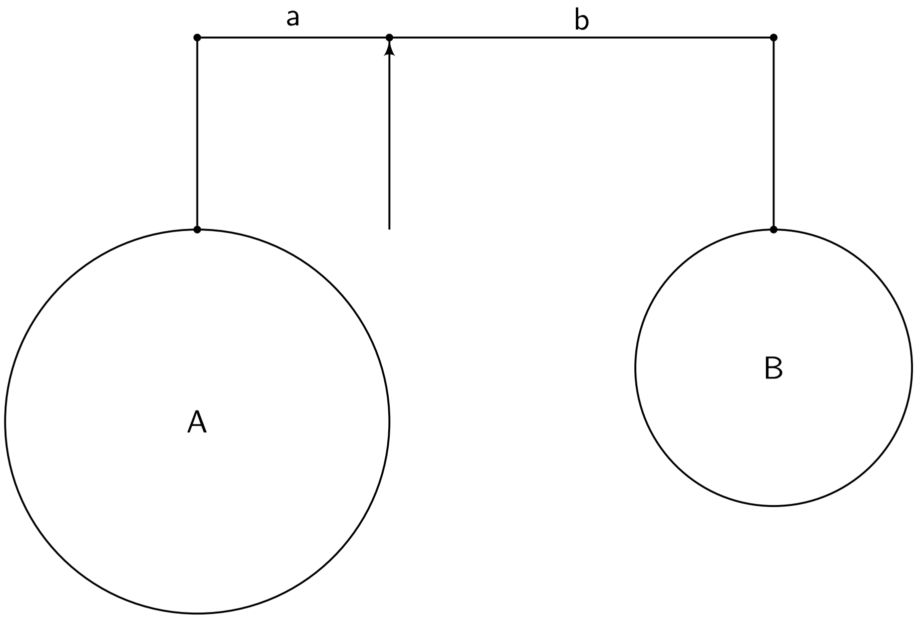
Archimedes (†212 fvt.) udvider Euklids størrelseslære på to måder.

Først generaliserer han de betragtede størrelser til også at omfatte kurver og flader, der er rande af konvekse figurer. Hans idé er uligheden, at randen af en konveks figur, der omslutter en anden konvekse figur, er større end den andens rand.



Archimedes' ligevægtslære

Dernæst introducerer han den fysiske idé at forestille sig en skålvægt:



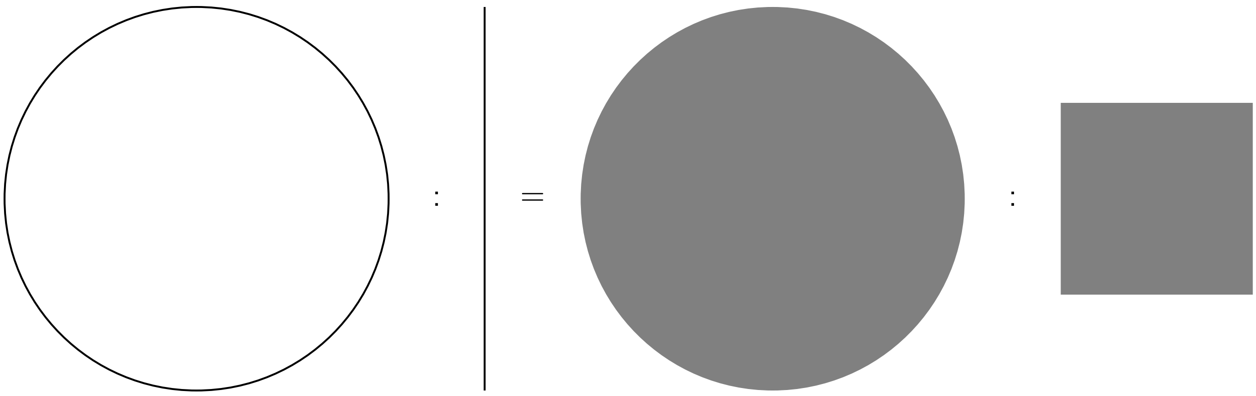
Ligevægt betyder, at

$$A : B = b : a$$

Archimedes' π

På den måde udvider han de betragtede ligninger til at gælde forhold mellem størrelser, der kun parvis har samme dimension. Derved undgår han at indføre volumenet af et 4–dimensionalt objekt.

Han kan så vise den interessante identitet:



En cirkels periferi forholder sig til dens diameter som cirkelsskiven til kvadratet på cirklens radius.

Dette fælles forhold blev senere døbt (Af Euler):

$$\pi$$

Archimedes viser også, sfærens areal er lig med arealet af en cirkelskive, der har sfærens diameter som radius. Det er herom han siger de berømte ord:

"Sådan har det altid været, men jeg er den første, der har vidst det."

Fermatpunktets fysik

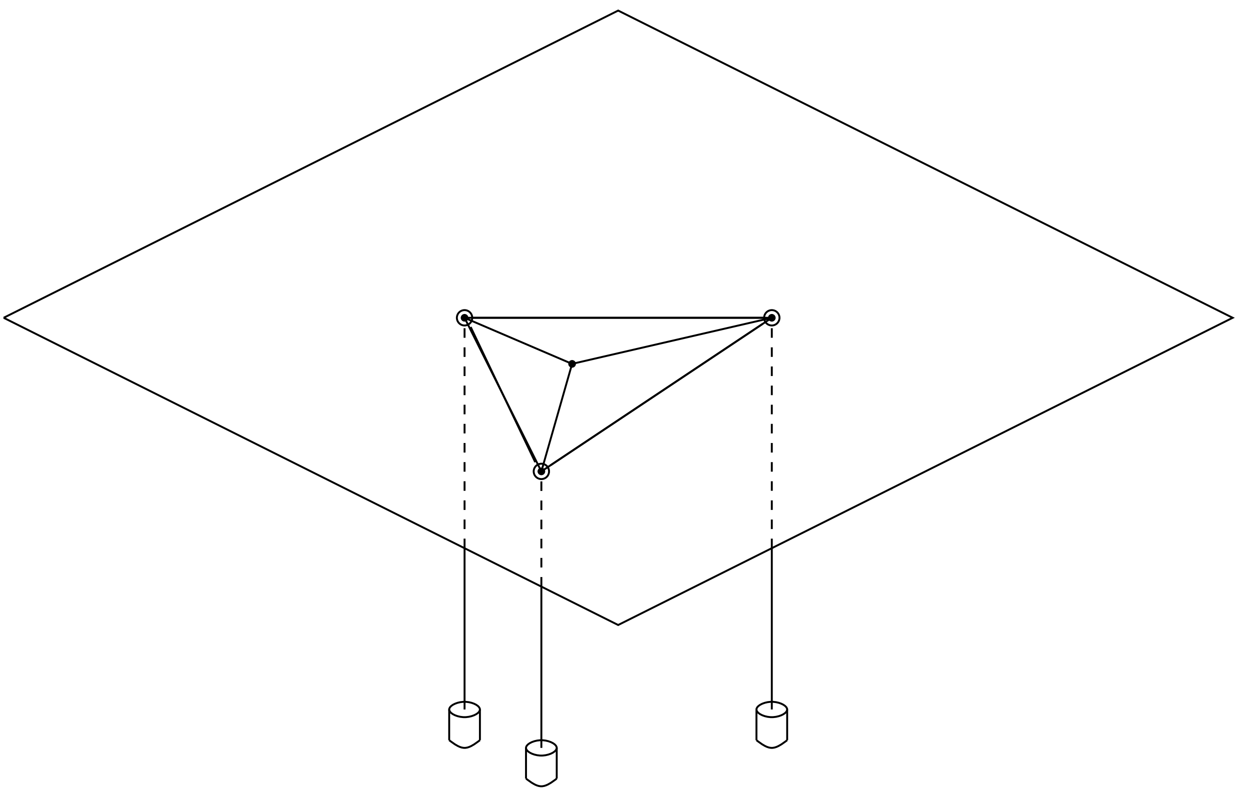
Et smukt eksempel på blanding af fysik og matematik er løsningen på Pierre de Fermats (1601–65) problem:

Givet en trekant.

Find det punkt, hvorfra summen af afstandene til de tre hjørner er mindst.

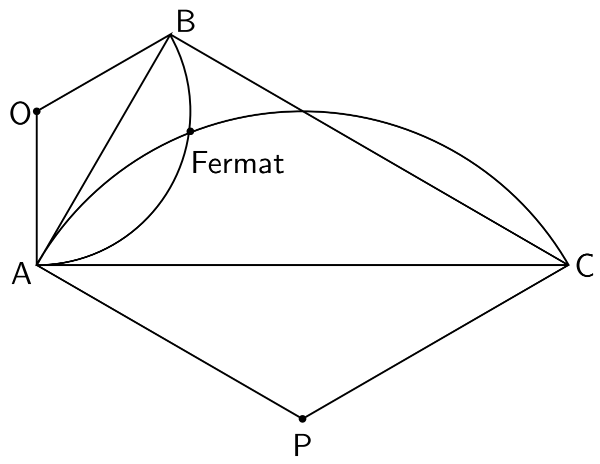
Vi analyserer problemet ved hjælp af et fysisk tankeeksperiment.

Tegn trekanten på en masonitplade og bor et hul i hvert hjørne. Vi trækker nu tre vægtløse tråde fra en fælles knude ned gennem hver sit hul og binder tre ens lodder i trådenes ender. Denne konstruktion vil være i ligevægt, der hvor tyngdepunktet er lavest, det samme som der, hvor summen af afstandene til de tre hjørner er mindst. Men ligevægt må også betyde, at de tre lige stærke træk i knuden har vektorsum 0, altså der, hvor de tre vinkler mellem vektorerne er ens. Dvs. 120°. (Naturligvis kræver det, at alle trekantens vinkler er mindre end 120°.)



Fermatpunktets matematik

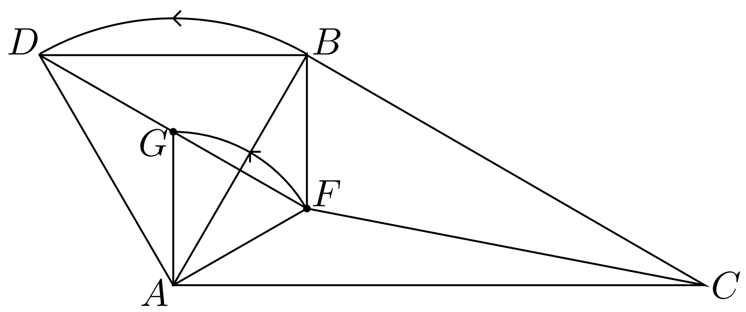
Et sådant punkt eksisterer og kan konstrueres ved at tegne to synsvinkelbuer over to af trekantens sider.



Et matematisk bevis, der udnytter den sætning, at den korteste vej mellem to punkter er den rette linie mellem dem, er lige så smukt.

Analyse.

Antag, at vi har fundet det søgte punkt, F, og at vi har tegnet de tre forbindelseslinier til hjørnerne. Vi drejer nu vektorerne AB og AF vinklen 60^o om A ud af trekanten til vektorerne AD og AG. så er $|DG| = |BF|$ OG $|GF| = |AF|$. Summen af afstandene fra F til hjørnerne er lig med længden af den brudte linie fra D til C, $DGFC$. Den er kortest, hvis den bliver den rette linie fra D til C. Samme løsning som ovenfor.



Ikke–euklidisk geometri

Matematikkens fordrivelse fra fysikken begynder omkring år 1800. Indtil da anses den euklidiske geometri som den perfekte matematiske model af det fysiske rum. Filosoffen Immanuel Kant (1724–1804) er eksponent for denne opfattelse, idet han anser den euklidiske geometri for at indeholde den eneste erkendelse, som både er "a priori" - givet på forhånd, og "analytisk" – uafhængig af erfaring. Men samtidige matematikere begynder at tvivle.

Problemet er, om parallelpostulatet er et axiom eller kan udledes af de andre – mere plausible – axiomer. Det siger, at givet en ret linie og et punkt uden for denne findes netop én ret linie gennem punktet parallel med den givne, (Eller som ikke skærer den givne). Heraf slutter man fx, at vinkelsummen i en trekant er 180° (Euklid: "To rette.") Utallige forsøg har været gjort på at udlede denne påstand af de øvrige axiomer.

Gauß

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) må have haft sine tvivl, – eller rettere set postulatets uafhængighed af de øvrige axiomer. Han opfatter spørgsmålet som et spørgsmål om den relevante model for fysikken! Han foretog en geodætisk opmåling af vinklerne i en trekant mellem de tre tyske bjergtoppe, Brocken, Hohenhagen og Inselberg, for at se, om vinkelsummen også i virkeligheden var 180°. Det fandt han, at den var.

Men andre, Nicolai Ivanovitsch Lobatschevskij (1793–1856) og Johann Bolyai (1802–60) udviklede ikke–euklidiske geometrier med parallelpostulatet erstattet enten af det axiom, at to forskellige rette linier altid skærer hinanden ("elliptisk geometri"), eller det axiom, at der til en ret linie og et punkt uden for denne gennem punktet findes evt. flere rette linier, der ikke skærer den givne ("hyperbolsk geometri").

Dermed kom matematikerne til at dyrke matematikker uden hensyn til deres eventuelle sammenhæng med fysikken. Samtidig begyndte man at betragte rum med et vilkårligt antal dimensioner.

At sådane fantasi–modeller kunne blive relevante for fysikken er sket før. Det mest slående eksempel er Johannes Keplers (1571–1630) elliptiske model for marsbanen. Han bruger teorien for keglesnit, kendt fra Euklid og senere Apollonios (2. årh. fvt).

Mængdelæren

Omtrent samtidig forlader matematikerne det fysiske indhold og vender sig mod en semantik baseret på Georg Cantors (1845–1918) "mængdelære," som er tung at danse med. Axiomerne fører umiddelbart til paradokser eller modsigelser. Mængden af delmængder af en mængde er altid større end mængden selv, hvorfor der ikke kan findes en største mængde, fx. ikke mængden af alle mængder. Dette kaldes

Russells paradoks, efter Bertrand Russell (1872–1970).

Bevis for Russells paradoks

En endelig mængde med n elementer har 2^n delmængder, og $n < 2^n$ gælder for alle n.
Det generelle bevis kan føres således: Lad A være en mængde og D mængden af dens delmængder. Hvis disse to mængder er lige store, så findes en funktion, $f : A \to D$, sådan at enhver delmængde, fx $d \in D$, er billede af et af elementerne, lad os sige $a \in A$, altså $d = f(a)$.
Lad nu $f : A \to D$ være en vilkårlig funktion. Vi vil vise, at der må findes en delmængde af A, der ikke er billede af noget element fra A ved funktionen f.
Betragt delmængden

$$B = \{x \in A | x \notin f(x)\}$$

Antag, at der findes et $y \in A$, så $B = f(y)$.
Hvis $y \in B$, slutter vi af definitionen, at $y \notin B = f(y)$. Og hvis $y \notin B = f(y)$, så slutter vi af definitionen, at $y \in B$.
Altså, $B \neq f(y)$ for ethvert $y \in A$, dvs, at der er flere delmængder end elementer i enhver mængde.

Et logisk paradoks

Det er ikke kun mængdelæren, der strider mod vores fysiske intuition. Også den rene logik kan gøre det.
I en kommode er der to skuffer. På den første skuffe står teksten:
"Ringen er i den anden skuffe."
På den anden skuffe står der:
"Netop én af sætningerne på skufferne er sand."
Dette udsagn kan jo være sandt eller falskt. Hvis det er falsk, så må det første udsagn også være falsk. Ringen er i dette tilfælde i den første skuffe. Men, hvis det er sandt, så er det første udsagn også falskt. Ringen er altså igen i den første skuffe.
Men, i en fysisk verden er der intet, der forhindre os i at lægge ringen i den anden skuffe!
Det er interressant, at hvis ringen ligger i den første skuffe, så er den første sætning falsk, og den anden er uafgørlig, den kan være sand eller falsk, det gør ingen forskel.
Men hvis ringen ligger i den anden, så er den første sætning sand, men den anden bliver selvmodsigende. Altså et besynderligt – fysisk – fænomen, at den anden sætnings logiske status afhænger af, om vi lægger ringen i den ene eller den anden skuffe!

Niels Bohr (1885–1962) definerede en “dyb sandhed” som en sand sætning hvis modsætning også var sand. Et eksempel er udsagnet
“Denne sætning består af seks ord”
med den lige så rigtige benægtelse,
“Denne sætning består ikke af seks ord!”
(Tæl selv efter).

Banach–Tarskis paradoks

Uanskueligheden af mængdelærern bliver smukt understreget af det berømte Banach–Tarski paradoks, der skyldes Felix Hausdorff (1868–1942), men benævnes efter Stefan Banach (1892–1945) og Alfred Tarski (1901–83), som skrev om det i 1924, med henvisning til Hausdorffs bog, *Grundzüge der Mengenlehre* fra 1914.
I al sin enkelhed siger det, at man kan dele en sfære eller for den sags skyld en kugle uden centrum i 3 kongruente disjunkte delmængder på en sådan måde, at 2 af dem kan sættes sammen, så de fylder hele sfæren (kuglen)! Et fænomen, der er i åbenbar modstrid med vor fysiske intuition!
Fra et matematisk synspunkt har vi bare bevist, at vi ikke kan definere et naturligt mål for rumfang, dvs et additivt mål, bortset fra identisk nul, sådan at alle mængder bliver målelige.
Vi tvinges til at definere begrebet “målelig” for delmængder.
Vi er tilbage til Pythagoras, tallene slår ikke til til at beskrive relationerne mellem objekterne!

Surreelle tal

Vi skal måske udvide talbegrebet igen? De reelle og komplekse tal, som vi har vænnet os til med fx Dedekinds snit (efter Richard Dedekind 1831–1916) i de rationale tal suppleret med $i = \sqrt{-1}$ er jo ikke den eneste mulighed.
John Horton Conway (1937–) fandt en generalisation i 1972 af tal og spil, tallene blev straks efter døbt “surreelle tal” af Donald knuth (1938–) i 1974.
Definitionerne er rekursive:
Et spil er et par af mængder af spil X^L og X^R og skrives $\{X^L|X^R\}$. Rekursionen starter blot med to tomme mængder.
Et surreelt tal er et par af mængder af surreelle tal, X^L og X^R, der opfylder, at intet element i X^L er større end eller lig med noget element i X^R, og betegnes $\{X^L|X^R\}$.
Et surreelt tal, $\{X^L|X^R\}$, er $\geq$ et andet, $\{Y^L|Y^R\}$, hvis og kun hvis ingen i X^R er $\leq \{Y^L|Y^R\}$ og $\{X^L|X^R\}$ er $\leq$ ingen fra Y^L.

Tallene er på denne måde specielle spil. Fx er $0 = \{|\}$. Men spillet $* = \{0|0\}$ er et spil, der ikke er et tal. Man finder, at $1 = \{0|\}$ og $-1 = \{|0\}$. Fx bliver $\frac{1}{2} = \{0|1\}$.
Tallene organiseres som et legeme, der omfatter, men er langt større end de reelle tals legeme. Regnereglerne defineres også rekurisivt, og er ganske subtile.
Produktet af de to tal, $x = \{X^L|X^R\}$ og $y = \{Y^L|Y^R\}$ er:

$$\{X^Ly+xY^L-X^LY^L, X^Ry+xY^R-X^RY^R|X^Ly+xY^R-X^LY^R, X^Ry+xY^L-X^RY^LR\}$$

(Conway fortalte, at han var et år om at finde på dette produkt.)
Et par eksempler på surreelle tal, der ikke er reelle er

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots|\}$$

der er større end alle reelle tal, altså uendeligt, og det overraskende

$$\frac{1}{\omega} = \{0|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\}$$

der er positivt, men mindre end alle rationale tal, altså en infinitesimal.
Det er også muligt at uddrage kvadratrødder, endda af negative tal uden at gå glip af ordningen!
Om disse størrelser har en fremtid, må denne vise. Men spillene er i hvert fald nyttige til beskrivelse af kombinatoriske spil!