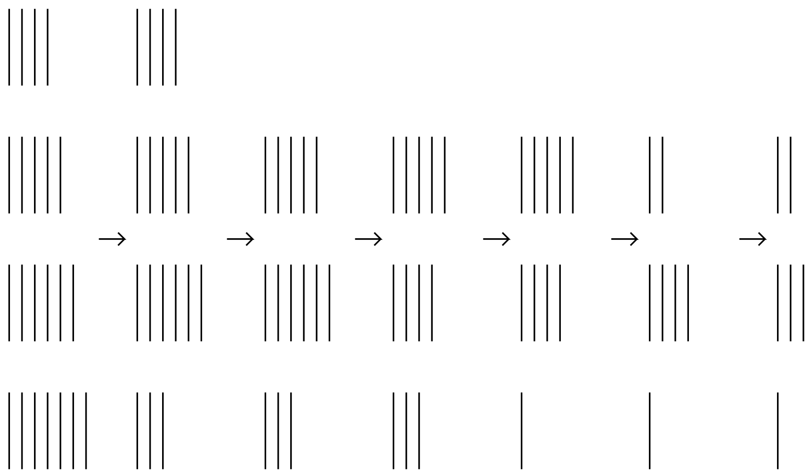
FAIR PLAY

Vi spiller nogle simple spil, hvor spillerne skiftes til at trække og har de samme træk til rådighed. Det sidste kalder vi "fair." Det er i modsætning til f. eks. skak, hvor spilerne kun må trække med brikker af en bestemt farve. Den første, der ikke kan trække, har tabt. Det gælder altså om at trække sidst!

Spil nr 1 Nim

Man fordeler et antal tændstikker i et antal bunker. Spillerne skiftes til at fjerne nogle af tændstikkerne, mindst én tændstik, fra en af bunkerne. Man må kun tage fra én bunke, men man må gerne fjerne hele bunken.

Her er et eksempel med bunker på 4, 5, 6 og 7 tændstikker.



Slutstillingen 1,2,3 er åbenbart tabt.

Hvis der kun er én bunke, som ikke er tom, så har den der er i trækket, mulighed for at vinde ved at fjerne hele bunken.

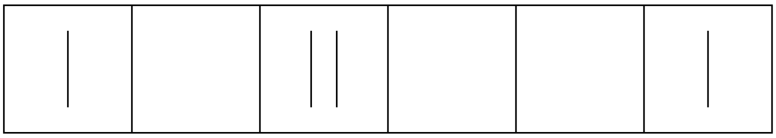
Hvis der er to bunker, kommer det an på, om de er ens eller forskellige. Hvis de er uens, kan man vinde ved at tage fra den største, så de bliver lige store. Hvis de er ens, kan man kun gøre dem forskellige. Modstanderen kan så gøre dem ens hver gang og vinde med den strategi.

Ligegyldigt hvad man fjerner fra 1,2,3, så kan modstanderen lave to lige store ud af resterne. Hvordan vinder man i almindelighed?

Spil nr 2 Nimbel

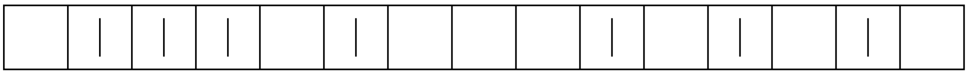
Tændstikkerne placeres på en stribe felter, det er lige meget hvor mange i hvert felt. Man skiftes til at rykke én tændstik én plads mod venstre. Der er ingen begrænsninger, der må være flere på samme felt og det er tilladt at rykke en tændstik ud over enden af striben.

Den, der tager den sidste tændstik, har vundet. Eller, den første, der ikke kan trække, har tabt.



Spil nr 3 Modificeret nimbel

Tændstikkerne placeres på en stribe felter, der må ikke være to i samme felt. Man skiftes til at rykke én tændstik én plads mod venstre, men man må ikke springe over en tændstik. Det er tilladt at rykke en tændstik ud over enden af striben.



Den, der tager den sidste tændstik, har vundet. Eller, den første, der ikke kan trække, har tabt.

Spil nr 4 Poker–nim

Man fordeler et antal tændstikker i et antal bunker. Desuden har hver spiller et antal til disposition. Spillerne skiftes til at fjerne mindst én tændstik fra én af bunkerne, gerne hele bunken, eller de kan lægge mindst én af deres egne til en bunke.
Den, der tager den sidste tændstik, har vundet. Eller, den første, der ikke kan trække, har tabt.

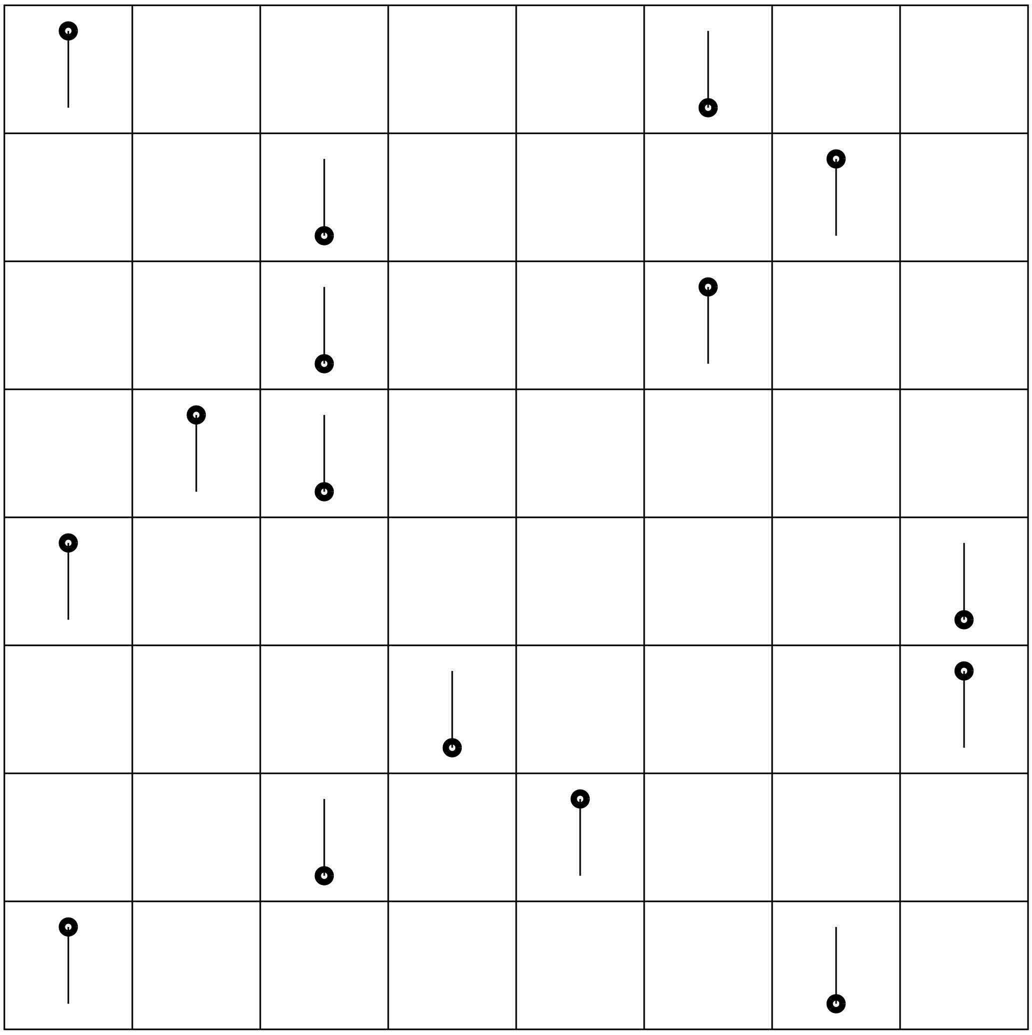
Spil nr 5 Grundy's spil

Der er en del bunker af tændstikker og man må dele en bunke i to af forskellig størrelse. Man starter med én bunke.
Den første, der ikke kan trække, har tabt.

Spil nr 6 Northcott's spil

Foregår på et skakbræt. I hver række er der to tændstikker, én med svovlet op og én med svovlet ned. De to spillere kan rykke hver sin slags inden for rækken, men må ikke springe over modstanderens.

Den første spiller, der ikke kan trække, har tabt.

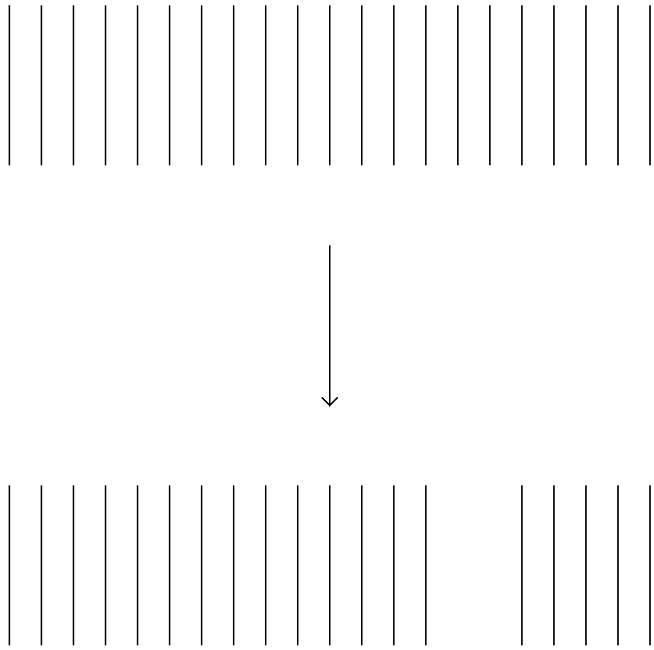


Spil nr 7 Lasker's nim

Man fordeler et antal tændstikker i et antal bunker. Spillerne skiftes til at fjerne mindst én tændstik fra én af bunkerne, gerne hele bunken, eller de kan vælge at dele en bunke i to mindre bunker.
Den, der tager den sidste tændstik, har vundet. Eller, den første, der ikke kan trække, har tabt.

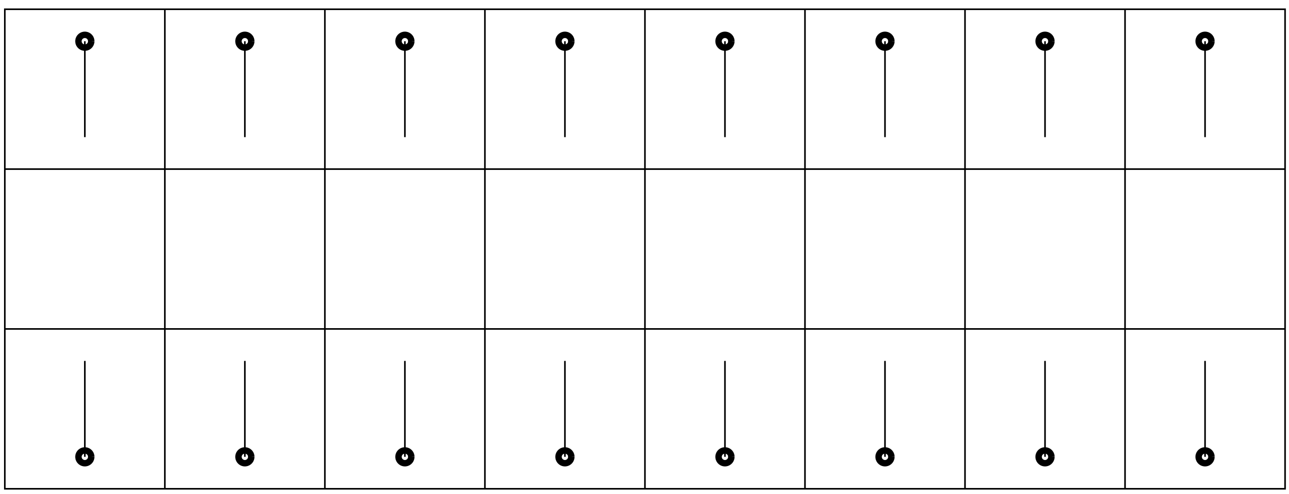
Spil nr 8 Kegler

Tændstikkerne stilles på en række. Man kaster nu sin kugle og rammer mindst én kegle, der vælter, og højst to kegler, man kun hvis de fra starten var naboer.
Den, der vælter den sidste kegle, har vundet.

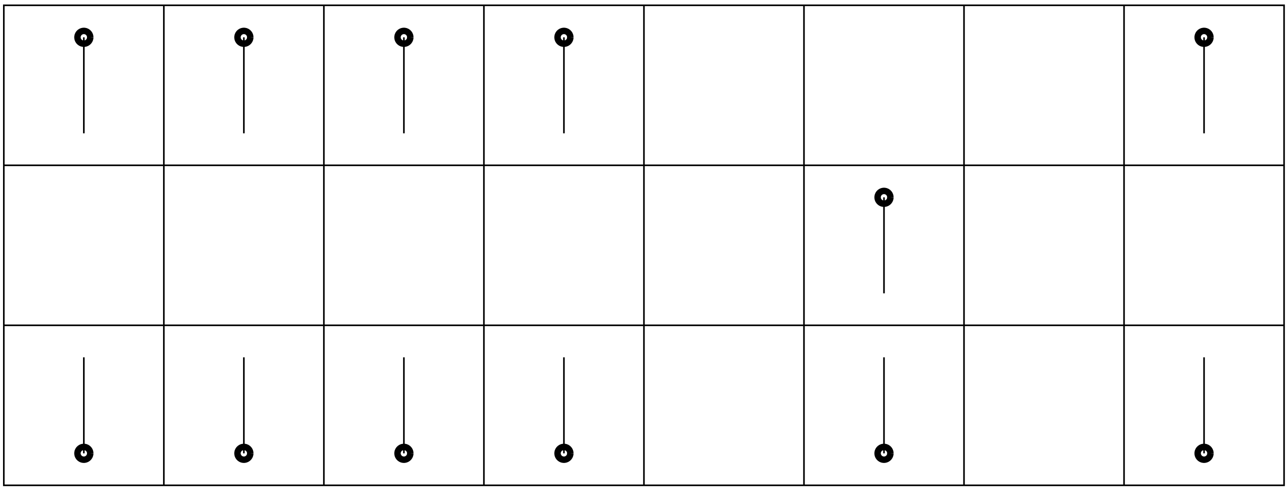


Spil nr 9 Dawson's skak

Et skakbræt har $3 \times n$ felter og de to spillere har hver n bønder markeret med tændstikker. Nu spilles efter sædvanlige regler, men man skal slå en brik hvis man kan.



Stillingen efter et træk og de tvungne slag:



STRATEGI

Vi skal nu forklare, hvordan man kan regne ud, om man kan vinde i nim og de andre spil, og hvordan man skal gøre det. Vi skal også se, at spillene ikke er så forskellige, som de tager sig ud.

Nim

Tricket er først at skrive antallene af tændstikker i 2–talsystemet under hinanden:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & = & 1 & 0 & 0 \\ 5 & = & 1 & 0 & 1 \\ 6 & = & 1 & 1 & 0 \\ 7 & = & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Så tæller man 1–tallerne i hver søjle. Er der lutter lige antal, så er stilligen tabt for den, der er i trækket. Er der et eller flere ulige antal, så kan man vinde ved at fjerne så mange, at antallene alle bliver lige.
I eksemplet fjernede vi 4 fra de 7, så tallene blev:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & = & 1 & 0 & 0 \\ 5 & = & 1 & 0 & 1 \\ 6 & = & 1 & 1 & 0 \\ 3 & = & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

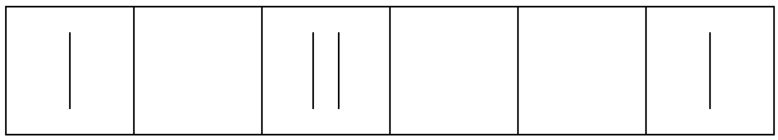
Nu er der 3 1–taller i første søjle, så der skal fjerne 4 tændstikker et sted fra. I eksemplet tog vi alle 4 i første bunke.
Det interessante er, at vi kunne lige så godt have tilføjet en femte bunke på 4 tændstikker. Så var spillet også tabt for den næste spiller. Vi kan tilskrive spillet den værdi, som er antallet af tændstikker i en bunke, vi kan tilføje, så spillet bliver tabt.
Denne værdi finder vi nemt ved at lægge tallene – skrevet i totalsystemet – sammen med den ekstra regel, at

$$1 + 1 = 0$$

Det gælder så, at er værdien 0, så har vi tabt, og er værdien en anden, så giver den os vinket om, hvad vi skal tilføje eller fjerne for at vinde.

Nimbel

Dette spil er Nim i forklædning. Hver af tændstikkerne kan erstattes af en bunke med så mange tændstikker, som der er mulige skridt fra feltet.
Det viste eksempel,



kunne lige så godt have været Nim med de 4 bunker:

Det giver altså

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 0 & 0 & 1 \\ 3 & = & 0 & 1 & 1 \\ 3 & = & 0 & 1 & 1 \\ 6 & = & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Der kan vindes ved at fjerne 5 tændstikker fra den sidste bunke, altså ved at rykke den yderste tændstik til højre 5 pladser mod venstre.

Sum af spil

Vi kan opfatte Nim som en sum af – meget simple – spil, nemlig de forskellige bunker. Hvert af disse spil er lette at vinde, men det er ikke så ligetil at bestemme, om summen er til at vinde. Allerede summen af to bunker giver problemer: Er bunkerne lige store, kan man ikke vinde, men er de af forskellig størrelse, så kan man vinde!
Det er ikke nok at vide, om de enkelte spil er vundne eller tabte. Man må regne mere raffineret som det også fremgår af regnereglerne. Har man to bunker med f. eks. 1

og 2 tændstikker, så er det et vundet spil. Tilføjer man en tredie bunke med netop 3 tændstikker, så bliver summen af spillene pludselig tabt!
Det er netop sådan med Nim, at der altid er én bunke, som man kan tilføje, sådan at summen bliver et tabt spil. Man kan derfor sige, at ethvert Nim–spil er ækvivalent med et Nim–spil med netop én bunke, der eventuelt kan være på 0 tændstikker, hvis spillet allerede er tabt.
Værdien af denne ene bunke findes ved regnereglen: At skrive antallene i 2–talsystemet, lægge sammen med reglen $1 + 1 = 0$, og læse resultatet i 2–talsystemet.
Det hele drejer sig om regning, men med en ny additionstabel:

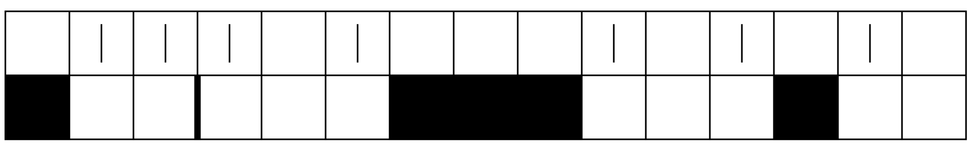
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Additionstabel for Nim

Når summen er fundet ved regning med tabellen, kan man konkludere, at spillet er tabt, hvis summen er 0, men kan vindes ellers.

Modificeret nimbel

Tricket er at tælle hverandet mellemrum startende yderst til højre. Hver flytning gør et mellemrum større og et andet mindre, og det er derfor nok at se på hveranden. De træk, der gør et sort mellemrum større, kan umiddelbart ophæves af modstanderen ved flytning af tændstikken til venstre for den netop flyttede. Eksemplet har mellemrummene:



1 0 3 1

Det svarer altså til et nim–spil med bunker på 1, 3 og 1 tændstik. Man kan derfor vinde ved at rykke den tændstik, der reducerer 3 til 0, eller ved at rykke den næstsidste tændstik et felt frem til stillingen 1, 3, 2.

Poker–nim

Den ekstra mulighed at tilføje tændstikker giver ikke større chance for gevinst. Modstanderen kan blot fjerne de tilføjede indtil man ikke har flere. Det er som i modificeret nimble. Rykkes den næstsidste tændstik et felt frem, kan den næste spiller rykke den sidste et felt frem, og så er man lige vidt.

Northcott's spil

Dette spil svarer til poker–nim. Rykkes væk fra modstanderen svarer det til at tilføje tændstikker, rykke hen mod modstanderen, svarer det til at fjerne tændstikker. Spillet i figuren svare derfor til et nimspil med 8 bunker med hhv. 4, 3, 2, 0, 6, 3, 1 og 5 tændstikker. Det giver os:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & = & 1 & 0 & 0 \\ 3 & = & 0 & 1 & 1 \\ 2 & = & 0 & 1 & 0 \\ 0 & = & 0 & 0 & 0 \\ 6 & = & 1 & 1 & 0 \\ 3 & = & 0 & 1 & 1 \\ 1 & = & 0 & 0 & 1 \\ 5 & = & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Stillingen er vundet, man skal blot fjerne 4 tændstikker fra en af dem, der har mere end 4. Det svarer til, at man skal rykke 4 pladser i 1., 5. eller 8. række hen mod modstanderen.
Vi kunne også benytte tabellen, 4+3=7, 7+2=5, 5+0=5, 5+6=3, 3+3=0, 0+1=1, 1+5=4. Resultat, summen af spillene svarer til en nim–bunke med 4 tændstikker.

Lasker's nim

En bunke på 1 – eller 0 – tændstikker er som i nim. Er der 2 tændstikker, kan man vælge at dele den i to, $\{1, 1\}$, men det er ikke bedre end at fjerne den helt. Så det er som i nim. Men en bunke på 3 kan deles i $\{1, 2\}$. Herfra kan man trække til 0 ved at fjerne 1 fra de 2, 1 ved at fjerne de 2 og 2 ved at fjerne den ene. En situation som en nim–bunke med 3 tændstikker. Med andre ord, fra 3 tændstikker kan vi nå 0, 1, 2 og 3! En bunke med 3 tændstikker har samme værdi i Lasker's nim som en bunke med 4 tændstikker i nim. Hvad med 4 tændstikker? Den kan umiddelbart reduceres til 0, 1, 2 og 4, nemlig en bunke med 3, der har værdien 4. Og ved deling kan den blive til $\{1, 3\}$ eller $\{2, 2\}$. Den første mulighed svarer til to bunker med hhv. 1 og 4, der har nim–sum 5. Den anden svarer til 2 bunker med hver 2, der har nim–sum 0. Med andre ord, en bunke på 4 kan føres til nim–bunker med 0, 1, 2, 4 eller 5. Men det er ligesom i poker–nim ikke bedre end en nim–bunke på 3. Hvis man går til 4 eller 5, så kan modstanderen altid reducere til 3. Fra de to bunker på 1 og 3 ved at tage en tændstik fra de 3 og få de to bunker med 1 og 2.
Sådan fortsætter Laskers nim periodisk med periode 4 med at ombytte værdierne af bunkerne, der giver rest 3 og 0 ved division med 4. Så 7 har nim–værdi 8 og 8 nim–værdi 7.

Reglen om den mindste undtagelse

Hvad kan vi lære af det? Jo, når et spil har de muligheder, at et træk reducerer spillet til et af en række spil, der hver for sig er ækvivalente med en nim–bunke, så er spillet selv ækvivalent med den nim–bunke, hvis antal er det mindste hele tal eller nul, der ikke forekommer i rækken.
Vi så i Laskers nim, at en bunke med 4 tændstikker kunne reduceres til en af nim–ækvivalenterne, 0, 1, 2, 4 eller 5. Det mindste hele tal, der ikke er med her, er 3. Dette spil er derfor ækvivalent med en nim–bunke med 3 tændstikker. Hvis man nemlig vælger 4 eller 5, så kan modstanderen trække begge disse muligheder til bunken med 3. Man kunne derfor lige så godt fra begyndelsen have valgt mellem mulighederne 0, 1 eller 2, de samme som man havde fra en bunke med 3.
Denne regel kaldes mindste undtageles reglen, MUR.

Kegler

Lad os anvende MUR på keglespillet. Det er klart, at 0, 1 og 2 kegler har nim–værdierne 0, 1 og 2. Også 3 kegler kan reduceres til 2, 1+1=0 eller 1, så værdien er – tilfældigvis – netop 3.
Men 4 kegler kan reduceres til 3, 2, 1+1=0 eller 1+2=3, så den mindste undtagelse er 1.
Og 5 kegler kan reduceres til 4 med værdien 1, 3, 2+2=0, 3+1=2 og 2+1=3. MUR giver altså værdien 4.
6 kegler kan tilsvarende reduceres til 5 med værdi 4, 4 med værdi 1, 4 og 1 med værdi 1+1=0, 3 og 1 med værdi 3+1=2, 3 og 2 med værdien 3+2=1 og endelig 2 og 2 med værdien 2+2=0. MUR giver derfor værdien 3.
Således bliver det ved, 7 får værdi 2, 8 værdien 1, 9 værdien 4 og 10 værdien 2, osv. indtil 70 kegler, der har værdien 6. Fra 71 bliver værdierne periodiske med periode 12.

Grundy's spil

Dette spil bliver umiddelbart til en sum af spil. Lad os prøve at anvende MUR på de første bunker. Bunker med 1 eller 2 kan ikke deles, så nim–værdien er 0. 3 kan deles i 1+2, der kan altså gøre 1 træk. Derfor er nim–værdien af 3 tændstikker 1. 4 kan kun deles i 3+1, der har værdierne 1+0=1. MUR giver derfor 4 nim–værdien 0.
Men 5 kan deles på to måder, i 4+1 med værdien 0+0=0 og i 3+2 med værdien 1+0=1. MUR giver derfor nim–værdien 2.
Og 6 kan deles på to måder, i 5+1 med værdien 2+0=2 og i 4+2 med værdien 0+0=0. Mur giver derfor nim–værdien 1.
Endelig kan 7 deles på tre måder, i 6+1 med værdien 1+0=1, i 5+2 med værdien 2+0=2 og i 4+3 med værdien 0+1=1. MUR giver derfor værdien 0.

Grundy's skala

En fiks måde at beregne værdierne i Grundy's spil er at lave en spejlvendt kopi af tabellen. Når den matches med den oprindelige kommer der til at stå alle mulige måder at skrive et tal som en sum af to mindre på. F. eks. ses her beregningen af nim–værdien af Grundy's spil med 12 tændstikker.

Grundy	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nim	0	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	?		
		2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	0			
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1			

Vi aflæser direkte summerne af parrene 11+1, 10+2, 9+3, 8+4 og 7+5 som hhv. 2+0=2, 0+0=0, 1+1=0, 2+0=2 og 0+2=2. MUR giver derfor 12 nim–værdien 1.

Dawson's skak

I Dawson's skak fjernes 1, og det reduceres til 0, eller der fjernes 2 og det reduceres til 0 eller 1 bunke, eller der fjernes 3 brikker og det reduceres til 0, 1 eller eventuelt til 2 bunker.
Derfor har 1 og 2 nim–værdi 1, men 3 kan føre til 1 med værdien 1 eller 0 med værdien 0. 3 har derfor nim–værdien 2. 4 kan føre til 2 eller 1, begge med værdien 1, så 4 har nim–værdien 0.
Det viser sig at fra 52 brikker er nim–værdierne periodiske med periode 34.
Når man har beregnet de første 120 og set, at der var en periode så langt, kan man være sikker på, at der er denne periode. Man ser nemlig at på Grundy skalaen kommer der en række gentagelser svarende til perioden. Derfor vil MUR reglen give præsic samme undtagelse som for en periode siden. Argumentet virker, når der er grænser for, hvor mange, man må fjerne af gangen. Det virker derfor ikke på nim. Det ville virke på Grundy's spil, men man har ikke fundet en periode blandt de første 3 millioner. Og ialt har man fundet 42 gange værdien 0, altså 42 bunkestørrelser, som er tabt af spilleren i trækket. Den største er på 1222.

Konklusion

Hvad kan vi lære af alt dette?
At i fair spil, dvs. spil, hvor de to spillere har de samme træk til rådighed, er det befordrenden at betragte summer af spil.
At det viser sig, at alle spil kan reduceres til summer af nim–spil med netop én bunke.
At man kan definere en måde at summere på, så det umiddelbart fremgår, om et forelagt spil er tabt – sum 0 – eller vundet – sum positiv.