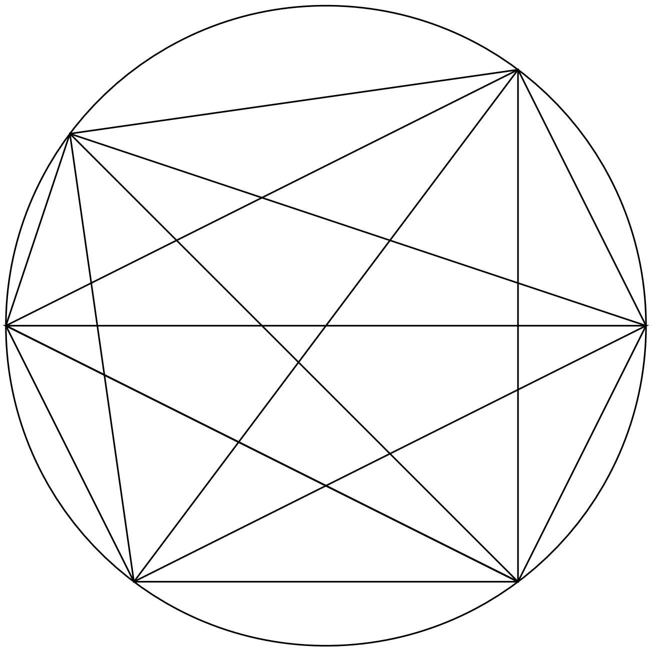
AFTERMATH

LØSNINGER

Opgaverne var hentet fra Charles W. Trigg, Mathematical Quickies og Raymond M. Smullyan, Logical Labyrinths, A. K. Peters Ltd. 2009.

Opgave 1.



Hvis n punkter på en cirkelperiferi forbindes med alle mulige korder, så tre korder intet sted går gennem samme punkt inden i cirklen, hvor mange trekanter dannes så i det indre af cirklen? (Altså med alle tre hjørner i det indre af cirklen.)

Hvert valg af 6 punkter på cirklen giver en trekant. Altså $\binom{n}{6}$.

Opgave 2.

Vis, at i en pythagoræisk trekant vil den ene katete altid være delelig med 3.

Fermat siger, at hvis p er et primtal og m ikke er delelig med p, så er $m^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Pythagoras kan skrives

$$\left(a^{3-1}-1\right)+\left(b^{3-1}-1\right)=\left(c^{3-1}-1\right)-1$$

Hvis hverken a eller b er delelige med 3, så er begge led på venstre side delelige med 3. Men højre side kan aldrig være delelig med 3. Altså må enten a eller b være det.

Opgave 3.

Heiberg mødte en indfødt, der hed Albert. Han erklærede, at hans far havde sagt, han og faderen var af forskellige slags, altså den ene bonde og den anden knægt. Hvis faderen også var indfødt, kan det så have sin rigtighed?

Hvis faderen havde sagt sådan og haft ret, så ville Albert ikke have sagt det. Og hvis faderen løj og alligevel sagde som citeret, så ville Albert have talt sandt og dermed gjort faderens udsagn sandt i modsææetning til, at han løj.

Opgave 4.

En dag ankom en spion til øen. Dvs en person, der lyver og taler sandt efter forgodtbefindende. Politiet, der alle er knægte, havde forgæves eftersøgt spionen. Derfor blev inspektør Craig fra Scotland Yard hidkaldt. Han afslørede, at spionen boede sammen med to venner, den ene bonde og den anden knægt. De tre blev arresteret og bragt for retten. Craig stillede nu to spørgsmål til den ene af de tre, der begge kunne besvares med ja eller nej, således at han kunne identificere spionen.

Hvilke spørgsmål kunne det have været?

Han spørger A om han ville kunne påstå, at B er spion. Hvis A svarer "ja," må han eller B være spionen. Vi ved altså, at C ikke er spion. Hvis A svarer "nej" og ikke selv er spion, så kan B ikke være spionen. Vi ved nu, at der er en bestemt, der ikke er spion, lad os sige, at det er B. Nu spørger vi så B, om han ville kunne påstå, at A er spionen. Denne gang slutter vi straks, at et "ja" betyder, at A er spionen, og et "nej," at C er spionen.

NYE OPGAVER

Opgave 1.

Udregn

$$5746320819 \cdot 125$$

Opgave 2.

Vis, at

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ikke har nogen reelle rødder.

Opgave 3.

Vis, at ligegyldigt hvilket grundtal vi skriver tallene med, så findes intet ciffer, a, som opfylder

$$aaa = a^3$$

Opgave 4.

For hvilke hele positive tal, n, vil $2n + 1$ gå op i $n^4 + n^2$?

Opgave 5.

For hvilke hele tal, a og b, er $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ et helt tal?

Opgave 6.

Lad p og q være ulige primtal uden noget primtal imellem dem. Vis, at $r = \frac{p+q}{2}$ er sammensat.