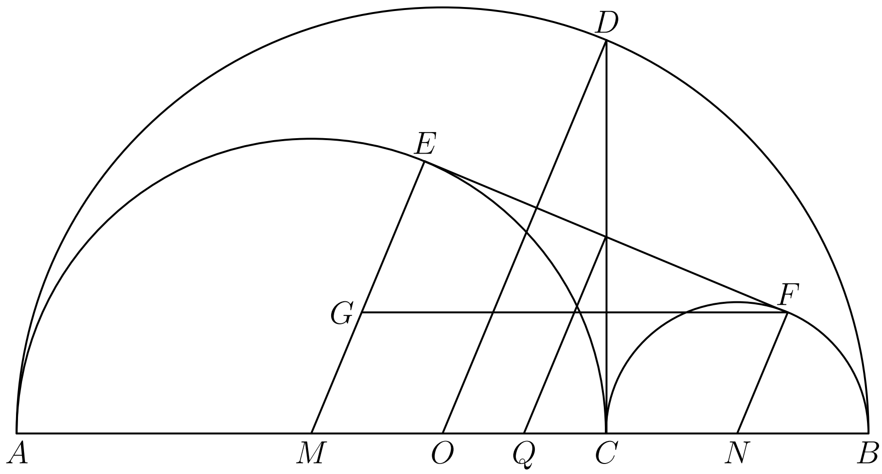
Kære Mogens,

Hermed løsningsforslag til opgaverne i $\widetilde{mat}$ 34.

Firkantet

Lad M, N, og O være centrerne i de tre halvcirkler over AC, CB, og AB, lad $R = |AM|$ og $r = |BN|$ være radierne i de to indvendige halvcirkler, og bemærk, at radius i den ydre halvcirkel er $R + r$.



For at bevise, at $ECFD$ er et rektangel, vil jeg bevise, at diagonalerne CD og EF er lige lange og halverer hinanden.

Af symmetrigrunde kan vi antage $R \geq r$, og da tilfældet $R = r$ er såre nemt, vil jeg nøjes med at se på tilfældet $R > r$.

Man ser, at $|MO| = (R+r) - R = r$, $|OC| = R - r$, og $|MN| = R + r$. Da radierne ME og NF er vinkelrette på fællestangenten EF, er de parallelle. Lad punktet G på ME være bestemt således, at $GF \| MN$. Så er $MNFG$ et parallelogram, og der gælder $|GF| = |MN| = R + r$, $|MG| = |NF| = r$, og altså $|GE| = R - r$.

I de retvinklede trekanter $\triangle OCD$ og $\triangle GEF$ gælder om hypotenuserne $|OD| = R + r = |GF|$, og om kateterne $|OC| = R - r = |GE|$. Altså er $\triangle OCD$ kongruent med $\triangle GEF$, og følgelig er $|CD| = |EF|$ som var den ene af de to påstande, jeg ville bevise.

Jeg skal også bevise, at CD og EF har samme midtpunkt. Lad Q være midtpunktet af OC. Den midtpunktstransversal i $\triangle OCD$, der forbinder Q med midtpunktet af CD har længde $\frac{1}{2}|OD| = (R + r)/2$, og den er parallel med OD.

Nu er Q også midtpunkt af siden MN i trapezet $MNFE$, så den midtpunktstransversal i dette trapez, der forbinder Q med midtpunktet af EF har længde $\frac{1}{2}(|ME| + |NF|) = (R + r)/2$, og den er parallel med ME og NF.

Vender vi tilbage til kongruensen mellem trekanterne $\triangle OCD$ og $\triangle GEF$, får vi, at $\angle COD = \angle EGF$, og altså, at OD er parallel med ME. Heraf ses, at de to omtalte midtpunktstransversaler er sammenfaldende, og altså, at midtpunkterne af linjestykkerne CD og EF er sammenfaldende.

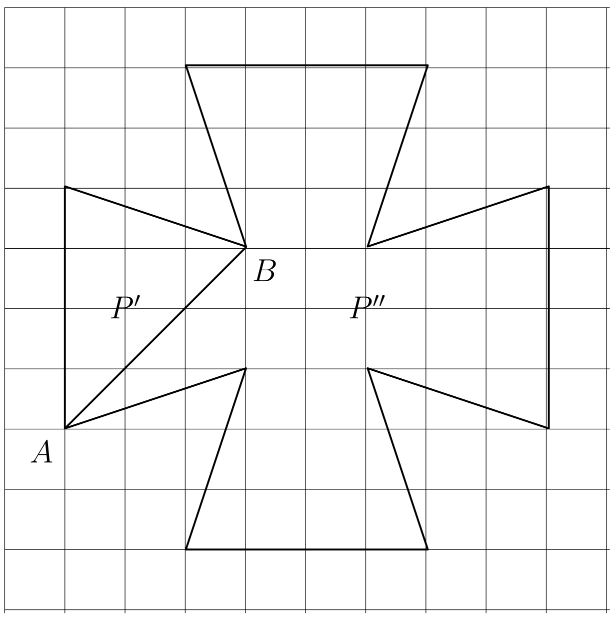
Trekantet

Jeg vil bevise, at formlen gælder ikke blot for trekanter, men for vilkårlige "gitterpolygoner", dvs polygoner med hjørner i gitterpunkterne. For en vilkårlig gitterpolygon P defineres $f(P) = i + \frac{1}{2}r - 1$, hvor i er antallet af gitterpunkter i det indre af P, og r antallet af gitterpunkter på randen.

Jeg skal bevise, at $f(P) = a(P) =$ arealet af P for enhver gitterpolygon P.

Lemma. *Hvis P er delt i to delpolygoner P' og P'' ved et linjestykke, der forbinder to gitterpunkter A og B på randen af P, så er*

$$f(P) = f(P') + f(P'')\,. \tag{1}$$



Bevis: Lad i, i', og i'' hhv r, r', og r'' betegne antallet af indre gitterpunkter hhv randgitterpunkter for P, P', og P'', og lad i^* betegne antallet af indre gitterpunkter i P, som tilhører linjestykket AB.

Så er

$$i = i' + i'' + i^*,$$

og da A og B tæller med både i r' og r'', er

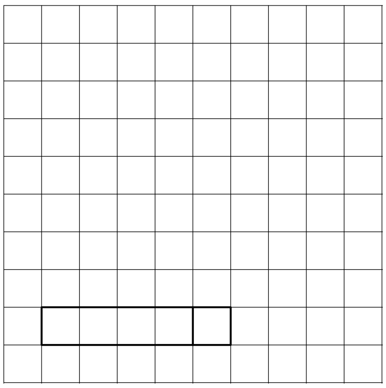
$$r = (r' - i^*) + (r'' - i^*) - 2,$$

og (1) følger.

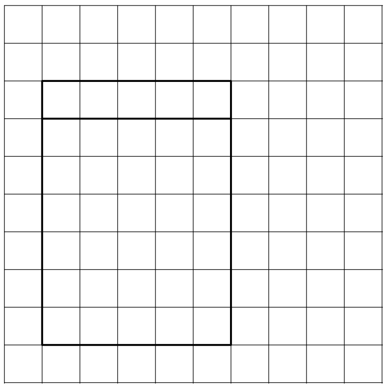
Bevis for, at $f(P) = a(P)$:

(a) Hvis P er enhedskvadratet, er $f(P) = a(P)$. Bevis: $i = 0$, $r = 4$

(b) Hvis P er et akseparallelt rektangel med sider m og n, er $f(P) = a(P)$.



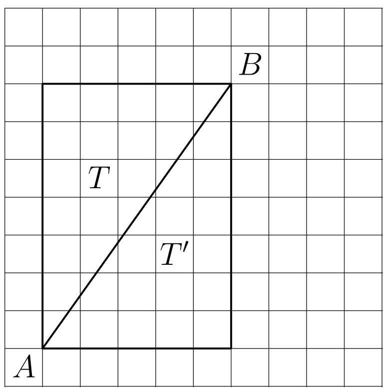
$m = 5, \; n = 1$



$m = 5, \; n = 7$

Bevis: Først induktion efter m med $n = 1$, derefter induktion efter n med m fast.

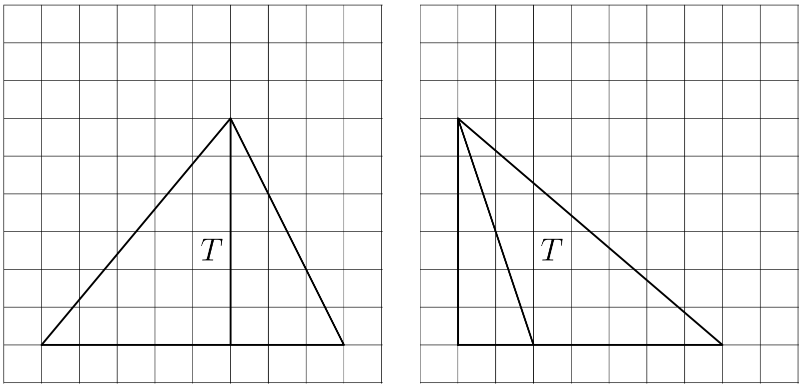
(c) Hvis T er en trekant med to akseparallelle sider, er $f(T) = a(T)$.



Bevis: Lad P være det rektangel, der fremkommer, når man tegner akseparallelle linjer gennem den tredje sides endepunkter A og B. Så deler linjestykket AB rektanglet P i to trekanter T og T'. Af symmetrigrunde er $f(T) = f(T')$ og $a(T) = a(T')$, og af (1) og (b) følger, at

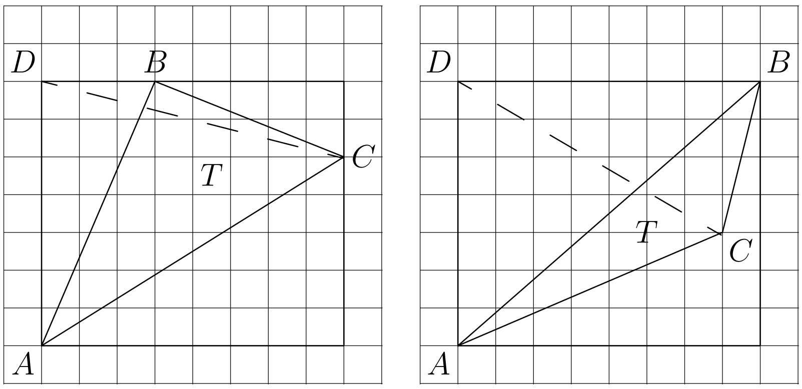
$$f(T) = \frac{f(T) + f(T')}{2} = \frac{f(P)}{2} = \frac{a(P)}{2} = a(T)\,.$$

(d) Hvis T er en trekant med én akseparallel side, er $f(T) = a(T)$.



Bevis: T er enten foreningsmængde af eller differens mellem to trekanter, der begge har to akseparallelle sider.

(e) Hvis T er en trekant uden en akseparallel side, er $f(T) = a(T)$.



Bevis: Lad R være det mindste akseparallelle rektangel, der indeholder T. Da hver af R's sider indeholder præcis én af T's vinkelspidser, er der en af T's vinkelspidser (A), der samtidig er vinkelspids i R, medens der om de to andre vinkelspidser i T gælder enten, at de ligger på hver sin af R's øvrige sider, eller, at en af dem (B) er sammenfaldende med den vinkelspids i R, der er over for A, og den anden i det indre af R.

Lad vinkelspidsen D i R være bestemt således, at $ADBC$ er en konveks firkant (se figurerne). Så er

$$\begin{aligned} f(T) &= f(ADC) + f(DBC) - f(ADB) \\ &= a(ADC) + a(DBC) - a(ADB) \\ &= a(T)\,. \end{aligned}$$

(f) Hvis P er en vilkårlig gitterpolygon, er $f(T) = a(T)$.

Bevis: P deles i trekanter.

Eksponentielt

Vi har

$$2^{29} = 2^2 \times (2^3)^9 \equiv 4 \times (-1)^9 = -4 \pmod 9$$

og

$$0 + 1 + 2 + \cdots + 9 \equiv 0 \pmod 9,$$

og altså må det manglende ciffer være 4.

Kvadratisk

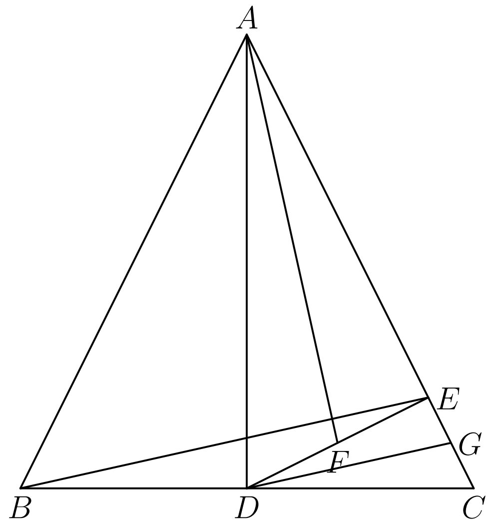
Hvis det ulige tal $2n+1$ er et kvadrattal m^2, er m ulige: $m = 2k+1$, og $2n+1 = 4k^2 + 4k + 1$, der giver

$$n + 1 = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2\,.$$

Trekantet

I trekanterne $\triangle EDA$ og $\triangle ECD$ er tilsvarende sider vinkelrette på hinanden: $ED \perp EC$, $DA \perp CD$, og $AE \perp DE$. Det følger, at trekanterne er ensvinklede og derfor ligedannede, og man ser, at en rotation omkring E med vinklen $\frac{\pi}{2}$ efterfulgt af en multiplikation i forholdet $|EC|\,/\,|ED|$ fører $\triangle EAD$ over i $\triangle EDC$. Ved denne afbildning føres ED's midtpunkt F over i EC's midtpunkt G, og AF føres over i DG.

Altså er $AF \perp DG$, og da DG som midtpunktstransversal i $\triangle BEC$ er parallel med BE, er AF vinkelret på BE, QED.



Heltalligt

Jeg vil repræsentere et firsæt af den angivne type ved hjælp af følgende diagram:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \cdots & \bigcirc \\ 0 & 1 & \cdots & a & \cdots & b & \cdots & c & \cdots & d & \cdots & n \end{array}$$

Der er $n+1$ cirkler arrangeret på linje — de tænkes nummereret fra 0 til n. Foran hver af cirklerne med numrene a, b, c og d placeres en lodret streg:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} \bigcirc & \bigcirc & \cdots & | & \bigcirc & \cdots & | & \bigcirc & \cdots & | & \bigcirc & \cdots & | & \bigcirc & \cdots & \bigcirc \\ 0 & 1 & \cdots & & a & \cdots & & b & \cdots & & c & \cdots & & d & \cdots & n \end{array}$$

Hvis to eller flere af tallene a, b, c, eller d er ens, placeres det relevante antal streger foran den tilsvarende cirkel. Det er let at se, at mønsteret af cirkler og streger bestemmer firsættet entydigt, og at de fire lodrette streger kan placeres vilkårligt i forhold til cirklerne bortset fra, at der ingen streger kan forekomme til højre for den sidste cirkel.

Antallet af forskellige firsæt er altså lig antallet af forskellige arrangementer af cirkler og 4 streger på de $n+4$ positioner, der er til rådighed foran den sidste cirkel, dvs $\binom{n+4}{4}$.

Polynomielt

Jeg går ud fra, at der skal stå $ax^2+bx+c=0$. Lad $x=p/q$ være et vilkårligt rationalt tal skrevet som en uforkortelig brøk. Så er

$$ax^2+bx+c = \frac{ap^2+bpq+cq^2}{q^2}\,,$$

og da p og q ikke begge kan være lige, indeholder tælleren enten 0 eller 2 lige led, dvs tælleren er ulige, og derfor $\neq 0$.

Beviset fungerer for enhver ligning af formen $ax^m + bx^n + c = 0$ med $1 \leq n < m$.

Med venlig hilsen