AFTERMATH

LØSNINGER

Problemklubben "Con Amore" har løst opgave 2.

Sidste gang mindedes vi Hans Tornehave ved at bringe nogle af hans typiske eksamensopgaver i elementær analyse.

Opgave 1.

Find konvergensradius for potensrækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)z^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)z^n,$$

og undersøg tillige, hvis konvergensradius er endelig, om rækkerne konvergerer på konvergenscirklens periferi.

Da $\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n} = \cot\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}$ bliver kvotienten $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}$. L'Hospital giver brøken

$$\frac{\cos^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n+2}}\cdot\frac{\log(n+1)}{\log(n)} =$$
$$\frac{\cos^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n+2}}\cdot\left(1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log(n)}\right) =$$
$$\frac{\cos^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n+2}}\cdot\left(1+\frac{\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\log(\frac{1}{n})}\right) \to 1$$

så konvergensradius er 1.

På konvergenscirklen vil vil ledfølgen divergere, så det gør rækken også.

Rodkriteriet giver $\left(\limsup \sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1} = \infty$.

Opgave 2.

Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(\sinh x - 1)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \cosh x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \cosh x - x.$$

$$-x + a\cosh x + b(\sinh x + 1)$$

Opgave 3.

Undersøg, om de ved

$$f(x) = e^{-x}\sin e^x,\quad g(x) = e^{-x}\sin e^{2x}$$

definerede afbildninger $f, g : [0,\infty[$ ind i $\mathbb{R}$ er ligelig kontinuerte.

Da funktionerne er ligeligt kontinuerte på ethvert kompakt interval og da de begge går mod 0 for $x\to\infty$, er de også ligeligt kontinuerte på det uendelige interval.

Opgave 4.

Find alle punkter $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^2$ som har en omegn, i hvilken ligningen

$$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2x_2 = 1$$

éntydigt bestemmer en implicit given funktion $x_2 = f(x_1)$, som tilfredsstiller betingelsen $Df(x_1^*) = 0$.

Lad $F(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2x_2 - 1$. Da er $D_1F(x_1,x_2) = 3x_1^2 - 6x_1x_2$ og $D_2F(x_1,x_2) = 3x_2^2 - 3x_1^2$. Punktet $(0,1)$ ligger på kurven og opfylder $D_1F(0,1) = 0$ og $D_2F(0,1) = 3 \neq 0$, så det kan bruges.

For $x_2 = tx_1$ er

$$F(x_1, tx_1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x_1^3\left(t^3 - 3t + 1\right) = 1$$

Da $D_2F = 0$ for $t = \pm 1$, kan tilfældet udelukkes. Elllers må $D_1F = 0$. Men da vi kan antage $x_1 \neq 0$, må $x_1 = 2x_2$. Men det giver jo $3x_2^3 = -1$, altså punktet $\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ som det eneste andet punkt.

Opgave 5.

Lad $[a, b] \subseteqq \mathbb{R}$ være et interval. Lad $\alpha : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være strengt voksende, og lad $f : [a, b]$ ind i $\mathbb{R}$ være kontinuert og ikke konstant. Vis de skarpe uligheder

$$(\alpha(b)-\alpha(a))m < \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) < (\alpha(b)-\alpha(a))M,$$

hvor $m = \inf f([a, b])$ og $M = \sup f([a, b])$.

Da f ikke er konstant, må den antage sin største og mindste værdi i forskellige punkter, lad x_M og x_m være eksempler herpå. Der findes en omegn, $[t_1, t_2]$, om x_m som ikke indeholder noget punkt, hvori f antager sin størsteværdi. Lad M_1 være størsteværdien i dette interval, den opfylder $M_1 < M$. Vi deler nu intervallet $[a, b]$ i 3 dele. Oversummen svarende til denne inddeling

$$\begin{aligned} &M\left(\alpha\left(t_1\right)-\alpha(a)\right)+M_1\left(\alpha\left(t_2\right)-\alpha\left(t_1\right)\right)+ \\ &M\left(\alpha(b)-\alpha\left(t_2\right)\right)<M(\alpha(b)-\alpha(a)) \end{aligned}$$

Den anden ulighed er analog.

Opgave 6.

Vis, at

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cos(y \sin t)\mathrm{d}t = 0.$$

Substitution af $t = \mathrm{Arcsin} u$ giver

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (\cos \mathrm{Arcsin} u)^2 \cos yu \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \\ &\int_0^1 \frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2}} \cos yu\mathrm{d}u = \\ &\int_0^1 \sqrt{1-u^2} \cos yu\mathrm{d}u \end{aligned}$$

hvilket er en cosinustransformation, som altid konvergerer mod 0 for $y \to \infty$.

Opgave 7.

Bevis formlen

$$\frac{1}{2}(\log(1-x))^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) x^n,$$

og angiv potensrækkens konvergensradius.

Vi har

$$\log(1-x) = -\sum n = 1^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$$

vi får derfor

$$(\log(1-x))^2 = \sum n = 2^{\infty} x^n c_n$$

hvor

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n \cdot k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n \cdot (n-k)} \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum k = 1^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

med konvergensradius 1.

Opgave 8.

I Hilbertrummet $\mathbb{R}^\infty$ betragtes mængden M af punkter $\underline{a}$, for hvilke $\sum n a_n^2$ er konvergent. Vis, at $\underline{a} \in M$, $\underline{b} \in M$, $k \in \mathbb{R}$ medfører $k\underline{a} \in M$ og $\underline{a} + \underline{b} \in M$. Vis, at M er overalt tæt i $\mathbb{R}^\infty$, og at $\underline{0}$ ikke er et indre punkt i M.

$$\begin{aligned} &\sum n\left(a_n+b_n\right)^2 \leq \sum n\left(a_n^2+b_n^2+2|a_n b_n|\right) = \\ &\sum n a_n^2 + \sum n b_n^2 + 2\sum \left|\left(\sqrt{n} a_n\right)+\left(\sqrt{n} b_n\right)\right| \\ &\leq \sum n a_n^2 + \sum n b_n^2 + 2\sqrt{\sum n a_n^2 \sum n b_n^2} \end{aligned}$$

For $\underline{a} \in \mathbb{R}^\infty$ og $\epsilon > 0$ findes N så $\sum_{n \geq N} a_n^2 < \epsilon^2$ Vi definerer nu $\underline{b} \in M$ ved

$$b_n = \begin{cases} a_n \text{ for } n < N \\ 0 \text{ for } n \geq N \end{cases}$$

Da

$$\sum \left(a_n-b_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{N-1} \left(a_n-b_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 \leq \epsilon^2$$

er $\operatorname{dist}(\underline{a}, \underline{b}) < \epsilon$.

At $\underline{0}$ ikke er et indre punkt i M ses ved at definere $\underline{c}$ som

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ for } n \geq N \\ 0 \text{ for } n < N \end{cases}$$

Opgave 9.

Med Φ betegner vi den ved

$$\Phi f(x) = xDf(x)$$

definerede differentialoperator. Vis, at differentialligningen

$$\Phi^{op}\chi = x\chi,$$

hvor $p \in \mathbb{N}$, har den ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^p}$$

definerede afbindning $f : \mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ som løsning.

Hans lavede en fejl i denne opgave. Løsningen til differentialligningen er $f + 1$.

Ved induktion ses, at

$$\Phi^{oi}(f+1) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^i x^n}{(n!)^p}$$

Opgaven løses af tilfældet $i = p$.

NYE OPGAVER

Opgave 1.

Faktoriser

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + \\ x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8$$

Opgave 2.

Hvor mange negative rødder har polynomiet

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$$

Opgave 3.

En sværm af punkter på 2 millioner ligger inden for en cirkel. Kan man altid finde en ret linie, der har 1 million punkter på hver side?

Opgave 4.

$$\sum_{k=1}^{n} kk!$$

Opgave 5.

To cylindre med diameter 2 cm skærer hinanden, så symmetriakserne skærer hinanden under en ret vinkel. Find rumfanget af fællesmængden.

Opgave 6.

Vis, at et fjerdegradspolynomium, hvis 5 koefficienter er i en eller anden rækkefølge sættet $1, -2, 3, 4, -6$ altid har en rational rod.

Opgave 7.

En ligesidet trekant og en regulær sekskant har samme omkreds. Hvad er forholdet mellem deres arealer?

Opgave 8.

Vis, at i decimalsystemet vil et kvadrattal med mere end et ciffer have mindst to forskellige cifre.