AFTERMATH

LØSNINGER

Nogle af opgaverne er fra USA Mathematical Olympiads, 1983,2, 1973,4, 1976,3, 1976,2, 1979,5. Den sidste opgave er fra Ed Barbeau, After Math.

Alle opgaver er løst af problemgruppen "Con Amore."

Polynomielt

Vis, at rødderne i et 5–te grads polynomium med reelle koefficienter,

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

der opfylder betingelsen $2a^2 < 5b$, ikke alle er reelle.

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer.

Lad rødderne være de reelle tal $x_1, \cdots x_5$. Da $a = -\sum_i x_i$ og $b = \sum_{i<j} x_i x_j$ finder vi, at

$$\begin{aligned} 5b - 2a^2 &= \sum_{i<j} 5x_i x_j - \sum_i 2x_i^2 - \sum_{i<j} 4x_i x_j \\ &= \sum_{i<j} x_i x_j - \sum_i 2x_i^2 \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Systematisk

Løs ligningerne

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3 \end{aligned}$$

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer, hvis løsning vi bringer.

Vi sætter $x = 1 + h$, $y = 1 + k$ og $z = 1 + \ell$. Ligningssystemet bliver da til

$$\begin{aligned} h + k + \ell &= 0 \\ h^2 + k^2 + \ell^2 &= 0 \\ h^3 + k^3 + \ell^3 &= 0 \end{aligned}$$

Der kan derfor ikke være andre reelle løsninger en 0–løsningen.

Vi indsætter nu $\ell = -h - k$ i de to af ligningerne og får

$$\begin{aligned} 2h^2 + 2k^2 + 2hk &= 0 \\ 3hk(h + k) &= 0 \end{aligned}$$

Af sidste ligning følger, at en af dem er 0. Lad $h = 0$. Af den første fås nu $k = 0$. Altså må også $\ell = 0$ og derfor $x = y = z = 1$.

Diophantisk

Find samtlige heltallige løsninger til

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 b^2$$

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer, der også gør opmærksom på, at opgaven har været bragt i Normat 2006, nr. 4 p. 187.

$a = b = c = 0$ er en løsning.

Hvis $c = 0$, så er $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 1$, der kun har løsningen $a = b = 0$.

Vi kan derfor nøjes med at søge løninger, hvor alle tre tal er naturlige. Hvis a eller b er ulige, fås $c^2 \equiv 3(4)$ – en modstrid. Derfor er alle 3 tal lige. Lad nu $a = 2^n p$, $b = 2^m q$ og $c = 2^\ell r$, hvor p, q og r er ulige. Antag f. eks. at $m \leq n$. Vi har så ligningen

$$2^{2(n+m)} p^2 q^2 - 2^{2n} p^2 - 2^{2m} q^2 = 2^{2\ell} r^2$$

Heraf følger, at $m \leq \ell$. Vi kan derfor forkorte ligningen til

$$2^{2n} p^2 q^2 - 2^{2(n-m)} p^2 - q^2 = 2^{2(\ell-m)} r^2$$

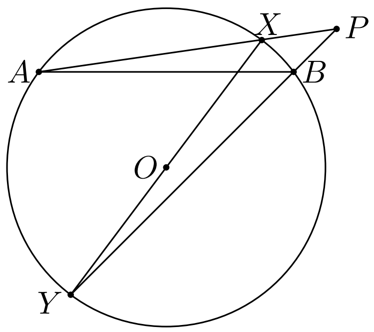
Hvis $m < n$, er venstre side kongruent med 3 modulo 4, hvad højre side ikke kan være. Og hvis $m = n$, står der

$$2^{2n}p^2q^2 - p^2 - q^2 = 2^{2(\ell-m)}r^2$$

hvor venstre side er kongruent med 2 modulo 4, mens højre side ikke er.

Geometrisk

Lad A og B være to punkter på en cirkel. Lad XY være en diameter, og lad P være skæringspunktet mellem linierne gennem A og X og B og Y hhv.



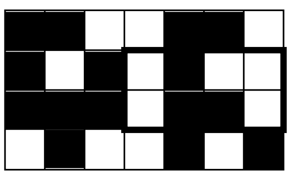
Bestem det geometriske sted for skæringspunkterne P, når XY gennemløber diametrene.

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer.

Da $\angle YAX$ er ret og $\angle AYB$ er konstant, og også $\angle APY$ konstant. P gennemløber derfor en synsvinkelbue, altså er det geometriske sted en vis cirkel, dog på nær punkterne A og B.

Skuffende

Antag, at hvert felt af et 4×7 skakbræt er farvet enten hvidt eller sort.



Vis, at for enhver sådan farvelægning findes et rektangel med akseparallelle sider og de fire hjørner af samme farve.

Lad os se på de tre øverste rækker. Der må være fire søjler, der alle har to af samme farve. Da kun tre forskellige placeringer er mulige, må to af søjlerne være ens.

PS. Et rektangel af størrelse 4×6 kan farves, så der ikke er noget delrektangel med fire ens hjørner.

Babylonisk

Ni matematikere mødes til en international konference og opdager, at blandt hver tripel er der to, som taler et fælles sprog. Hvis vi yderligere ved, at hver matematiker højst taler tre sprog, så skal man vise, at der er tre matematikere, der taler et fælles sprog.

Lad os kalde et sprog for et **fællessprog,** hvis (og kun hvis) mindsts to af matematikerne taler det. Endvidere tænker vi os 27 punkter fordelt jævnt på en cirkel, 3 punkter for hver matematiker. For hver matematiker farver vi et punkt med en farve svarende til det fællessprog, hun taler mens eventuelle overskydende punkter, der svarer til et sprog, hun har for sig selv, eller mangelen på et sprog, fjernes. Nu forbinder vi de punkter, der har samme farve, med liniestykker, der så får den pågældende farve. Hvis der er to liniestykker med samme farve, er der mindst tre, der taler det tilsvarende fællessprog. Vi går derfor ud fra, at liniestykkerne har forskellige farver. Af dem kan der højst være 13. Da disse forbinder 26 punkter, må der være et punkt, der er fjernet. Der er altså mindst én matematiker, A, der højst har to punkter. Hun taler derfor højst med to af de andre. Der findes derfor 6 matematikere, der ikke taler samme sprog som A. Men hver gang A er sammen med to af de seks, skal to tale samme sprog, altså de to andre. Men det giver 15 sprog blandt de 6, og der var kun 13 til rådighed.

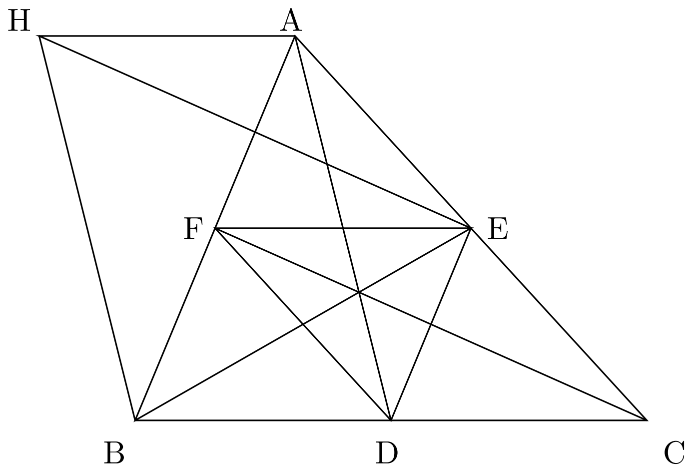
Noget om medianerne

Denne opgave er tillige løst af Henrik Meyer.

I en trekant, $\triangle ABC$, er tegnet de tre medianer, dvs. at f. eks. D er midtpunktet af liniestykket BC. Trekanten $\triangle DEF$ er ligedannet med $\triangle ABC$, og da siderne er halvt så lange, er dens areal en fjerdedel. Også hver af de tre trekanter, $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, og $\triangle CDE$ er ligedannede med den oprindelige i halv størrelse og derfor af areal en fjerdedel.

Man kan nu tegne en trekant med siderne af længde som de tre medianer, AD, BE og CF. Opgaven går ud på at vise, at denne mediantrekants areal er $\frac{3}{4}$ af trekantens, $\triangle ABC$.

Vi tegner mediantrekanten som $\triangle BEH$, så $BH = AD$ og $EH = CF$.



Så er AH parallel med BC og EF, og derfor er trekanten $\triangle EFH$ lige stor med $\triangle AEF$ og har derfor arealet en fjerdedel. Tilsvarende er $\triangle BEF$ lige stor med $\triangle BDF$ og derfor af arealet en fjerdedel. Endelig er $\triangle BFH$ lige stor med $\triangle DEA$ (parallelforskydning), som er lige stor med $\triangle DEF$ og derfor af arealet en fjerdedel. Tilsammen de ønskede $\frac{3}{4}$.

NYE OPGAVER

Kvadratur

Lad d være et naturligt tal, så $d \notin \{2, 5, 13\}$. Vis, at der findes $a \neq b$, $a, b \in \{2, 5, 13, d\}$, som opfylder, at $ab - 1$ ikke er et kvadrattal.

Funktionalt

Find alle funktioner på den ikke–negative reelle akse ind i sig selv, som opfylder

$$(i) \quad f(xf(y))f(y) = f(x + y) \quad \text{for alle } x, y,$$

$$(ii) \quad f(2) = 0,$$

$$(iii) \quad f(x) \neq 0 \quad \text{for } 0 \leq x < 2.$$

Rød eller hvid?

Givet en endelig mængde af punkter i planen, alle med heltallige koordinater. Vis, at man altid kan farve dem røde og hvide, så alle har en af farverne, og således at for enhver akseparallel linie vil antallet af røde og antallet af hvide på linien højst afvige med 1.

Kombinatorik

Lad $p_n(k)$ være antallet af permutationer af n elementer med netop k fixpunkter. Vis formlen

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

Cirkler

Givet to koncentriske cirkler med radier $R > r$. Lad P være et fast punkt på den lille cirkel, og lad B være et variabelt punkt på den store. BP skærer den store yderligere i C. Den vinkelrette linie til BP i P skærer den lille cirkel ydeligere i A.

Find værdierne af $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

En ulighed

Lad a, b og c være rellele tal, der opfylder $abc = 1$.

Vi, at

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Endnu et kvadrat

Lad a og b være naturlige tal, der opfylder, at $ab + 1$ går op i $a^2 + b^2$. Vis, at

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

er et kvadrattal.

Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke $\frac{2^n+1}{n}$ er et helt tal.

En divisor

Find alle hele tal a, b og c med $1 < a < b < c$ som opfylder, at $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ er en divisor i $abc - 1$.

Og en anden divisor

Find alle positive hele tal a og b som opfylder, at $ab^2 + b + 7$ er en divisor i $a^2b + a + b$.