AFTERMATH

LØSNINGER

Opgaverne var hentet fra Charles W. Trigg, Mathematical Quickies, McGraw–Hill 1967.

Opgave 1.

Faktoriser

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8$$
$$= \left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^6 - x^3y^3 + y^6\right)$$

Opgave 2.

Hvor mange negative rødder har polynomiet

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$$

Ingen. Ligningen $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ kan skrives $\left(x^2 - 2\right)^2 = 5x^3 + 7x$ som ingen negative tal kan tilfredsstille.

Opgave 3.

En sværm af punkter på 2 millioner ligger inden for en cirkel. Kan man altid finde en ret linie, der har 1 million punkter på hver side?

Vælg et punkt uden for cirklen og ikke beliggende på nogen linie gennem et par af punkterne i sværmen. Drej nu en linie gennem dette punkt ind gennem sværmen. Den passerer nu punkterne i sværmen et ad gangen, så en gang halverer den denne.

Opgave 4.

$$\sum_{k=1}^{n} kk!$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k+1)k! - \sum_{k=1}^{n} k! =$$
$$\sum_{k=2}^{n+1} k! - \sum_{k=1}^{n} k! = (n+1)! - 1$$

Opgave 5.

To cylindre med diameter 2 cm skærer hinanden, så symmetriakserne skærer hinanden under en ret vinkel. Find rumfanget af fællesmængden.

$\frac{16}{3}cm^3$. Et snit parallelt med det midterste kvadrat vil være et kvadrat, hvis indskrevne cirkel er snittets snit med den indskrevne sfære. Det søgte volumen forholder sig derfor til kuglens som kvadratets areal til arealet af kvadratets indskrevne cirkel. Altså er det $\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{4}{\pi} cm^3$.

Opgave 6.

Vis, at et fjerdegradspolynomium, hvis 5 koefficienter er i en eller anden rækkefølge sættet $1, -2, 3, 4, -6$, altid har en rational rod.

For et polynomium, f, gælder, at $f(1)$ er summen af koefficienterne. Er $f(1) = 0$ så har polynomiet den rationale rod 1.

Opgave 7.

En ligesidet trekant og en regulær sekskant har samme omkreds. Hvad er forholdet mellem deres arealer?

Trekanten deles i 4 kongruente trekanter med siden lig med trekantens halve side. Sekskanten deles af de 6 radier fra hjørnerne i 6 kongruente trekanter, der tillige er kongruente med de 4 fra trekanten. Forholdet mellem arealerne er derfor 2:3.

Opgave 8.

Vis, at i decimalsystemet vil et kvadrattal med mere end et ciffer have mindst to forskellige cifre.

Et kvadrattal ender på et af 0, 1, 4, 5, 6, 9. Hvis det ender på 6, er næstsidste ciffer ulige. Ellers er næstsidste ciffer lige, så vi må søge blandt tal, der skrives med lutter 4–taller. Det er derfor 4 gange et kvadrattal, der er skrevet af lutter 1–taller. I modstrid med at næstsidste ciffer er lige, når det sidste er 1.

NYE OPGAVER

Opgave 1.

Vis, at for alle positive tal, p, q, r, s vil

$$\frac{\left(p^2+p+1\right)\left(q^2+q+1\right)\left(r^2+r+1\right)\left(s^2+s+1\right)}{pqrs} \geq 81$$

Opgave 2.

En bestyrelse har 15 medlemmer, som tillige sidder tilsammen i 20 udvalg. Hvert bestyrelsesmedlem sidder i 4 udvalg. Hvert udvalg har 3 medlemmer. To udvalg har højst et medlem fælles.

Er dette muligt?

Opgave 3.

Lad

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Hvilken rest fås ved division af $f\left(x^5\right)$ med $f(x)$?

Selv om Paulus hævder, at alle kretensere er løgnere (brev til Titus), så er denne tilstand ændret i årtusindernes løb. Nu er det kun en del af befolkningen, der lyver bestandig. Lad os kalde disse forvorpne for knægte, og den sanddru del af befolkningen for bønder. En knægt lyver altid og en bonde taler altid sandt!

Opgave 4.

En dansk turist, måske J. L. Heiberg?, mødte to indfødte, lad os kalde dem A og B. A sagde nu: “Vi er begge knægte!”

Hvad ved Heiberg nu?

Opgave 5.

Hvad om A havde sagt: “Mindst en af os er en knægt!”

Opgave 6.

Og hvad om A havde sagt: “Vi er begge af samme slags!”

Opgave 7.

Vi ved også, at knægtene bor i Knossos, mens bønderne dyrker deres sukkerrør i Candia. I en vejgaffel møder Heiberg en indfødt, og vil gerne finde vejen til Candia. Hvad kan Heiberg spørge om, som kan besvares med “ja” eller “nej” og give den relevante oplysning?