Tallet π

Mogens Esrom Larsen, Matematisk Institut, Københavns Universitet

How I want a drink,
alcoholic of course,
after the heavy
lectures involving
quantum mechanics.

Tallet π er den flittigste af Tordenskjolds konstanter: vi møder det så ofte, at vi begynder at vente det, når vi er ved at løse et nyt problem. Hvis vi f.eks. tæller bogstaverne i citatet ovenfor, får vi

3 - 1 - 4 - 1 - 5 - 9 - 2 - 6 - 5 - 3 - 5 - 8 - 9 - 7 - 9,

der vil genkendes som decimalbrøken π's begyndelse.

Vi møder π i formlerne for cirkler og kugler, f.eks. cirklens omkreds, der er proportional med dens diameter:

$$O = \pi \cdot 2r$$

Cirklens areal, der er proportional med kvadratet på dens radius:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Kuglens overflade, der er proportional med kvadratet på dens diameter:

$$K = \pi \cdot (2r)^2$$

Og kuglens rumfang, der er proportionalt med terningen på dens radius:

$$V = \pi \cdot \frac{4}{3} r^3$$

Overalt er det den samme irrationale proportionalitetsfaktor, π, der optræder.

Mere overraskende er det, at vi møder π, når vi begynder at studere uendelige rækker.

Ved en uendelig række forstås et udtryk som f.eks.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \text{for} \quad |x| < 1$$

der fås af kvotientformlen

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} \quad \text{for} \quad x \neq 1$$

ved at lade N gå mod ∞.

Den første række, der må have en endelig sum, men hvis værdi ikke er oplagt, er Leibniz' række (1674):

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

og den næste bliver Euler's række (1734):

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Senere finder vi (Euler):

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$$

vi får en potens af π for alle de lige eksponenter.

Man har naturligvis spurgt, hvordan det går med de ulige potenser, f.eks.

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots$$

men selv om det er bevist, at summen er irrational, ved man ikke, om den står i et rationalt forhold til π eller π^3 (Summen ovenfor med 3-tallet i eksponenterne erstattet af et vilkårligt komplekst tal, z, er den funktion, der hedder *Riemann's ζ-funktion*. Det er den funktion, hvis nulpunkter det er så vanskeligt at lokalisere.

Men endnu mere overraskende er det, at sandsynlighedsregningens grundintegral har relation til π (Gauss; 1809):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Når vi når til at bestemme rækker for de elementære funktioner, f.eks. (Newton; 1669):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

og

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} + \cdots$$

er det besynderligt at tænke på, at det mindste positive nulpunkt for den sidste række er $^{\pi}/_{2}$.

Endelig optræder π ved indførelsen af de komplekse tal. Tallet "i" med egenskaben $i^2 = 1$ ser så uskyldigt ud, men sætter vi det ind i rækken for e^x, får vi

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1+ix-\frac{x^2}{2}-i\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{i^n x^n}{n!}+\cdots \\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots+\frac{(-x^2)^n}{(2n)!}+\cdots \\
&\quad +i\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right) \\
&= \cos x + i\sin x
\end{aligned}
$$

og derfor Eulers berømte formel (1748):

$$e^{i\pi} = -1$$

Og det er altid det samme π.

Det er derfor ikke mærkeligt, at man længe har ønsket at kende tallet π med stor nøjagtighed. Pudsigt nok har det aldrig været let. Archimedes fandt ca. 200 f.v.t., at

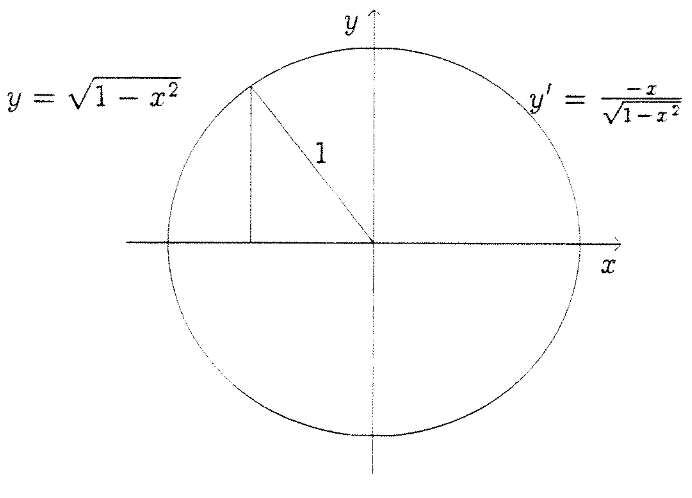
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Den ældste forbedring er fra Zu Chang-Zhi, der i det 5. århundrede fandt:

$$\pi \approx \frac{355}{113}$$

Først i det 16. århundrede fandt man 35 decimaler i Europa.

Problemet er født til at være besværligt. Archimedes tilnærmede cirklen med polygoner, og måtte op på en 96-kant, blot for at finde tilnærmelsen ovenfor.



Vi kan nemt komme til at gøre det samme, hvis vi prøver at beregne cirklens areal eller cirkelbuens længde ved et integral, som vi derefter tilnærmer numerisk med en kvadraturformel, så bliver resultatet noget lignende.

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\pi = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Man kunne tænke sig at anvende nogen af rækkerne. Men alle de nævnte rækker konvergerer utroligt langsomt. Man skal medtage millioner af led for at få 10 decimaler.

Men i 1706 fandt Machin et trick: Først må vi indføre den omvendte funktion til tan, som kaldes *arkustangens*, $\tan^{-1}$:

$$v = \tan^{-1}x \Leftrightarrow x = \tan v \wedge -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$$

Ved substitution $t=\tan v$ finder vi, at

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan^{-1}x}\frac{1+\tan^2 v}{1+\tan^2 v}\,\mathrm{d}v = \tan^{-1}x$$

Og kvotientrækken giver

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots+(-x^2)^n+\cdots$$

som kan integreres:

$$
\begin{aligned}
\tan^{-1}x &= \int_0^x 1\,dt-\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t+\int_0^x t^4\,\mathrm{d}t-\cdots+\int_0^x(-t^2)^n\,\mathrm{d}t+\cdots \\
&= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots
\end{aligned}
$$

(For $x = 1$ fås Leibniz' række.)

Den afgørende idé er at bruge denne række på en formel, der let udledes af additionsformlen for tangens, nemlig

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

Machin brugte denne idé til at finde de første 100 decimaler, og formlen har siden været den vigtigste til at finde flere.

Først med de seneste års computere er ambitionsniveauet blevet så højt, at andre formler bliver interessante. I 1989 beregnede brødrene Chudnovsky 1 milliard decimaler, og det er et hukommelses- og pladsproblem. Men en måde at klare skærene er at bruge en formel af Ramanujan, nemlig

$$\frac{81}{\pi} = \frac{5}{16}+\frac{47}{8192}+\cdots+\binom{2n}{n}^3\frac{42n+5}{2^{12n+4}}+\cdots$$

Fordelen ligger i, at nævneren er en potens af 2. Nu kan man beregne bimal-brøkens cifre uden at skulle kende eller benytte de foregående.

Ved siden af alle disse regnestykker gik en parallel bestræbelse på at konstruere π. Det vil sige, for et givet liniestykke at konstruere et andet med passer og lineal, så det er lige så langt som omkredsen af den cirkel, der har det første som radius. Denne opgave kaldes *cirklens kvadratur*, fordi man jo så straks har den retvinklede trekant med radius og omkreds som kateter, og denne trekant har samme areal som cirklen. (Opgaven var egentlig at give et kvadrat med samme areal som cirklen, men det er let nok at finde et kvadrat med samme areal som en given retvinklet trekant.)

Hvis cirklens kvadratur skulle kunne løses, så skulle π kunne skrives alene ved hjælp af hele tal, almindelige regneoperationer samt kvadratrødder. Dette lykkedes ikke, men det var ikke let at forstå hvorfor. Først i 1766 lykkedes det (næsten) for Lambert at bevise, at π var irrational, og det er jo ikke nok. Vi kan let konstruere visse irrationale tal, f.eks. $\sqrt{2}$. Men endelig i 1882 fik Lindemann sat punktum for cirklens kvadratur. Han viste, at π ikke kan skrives med rodtegn overhovedet. π er transcendent, dvs., at det ikke er rod i noget polynomium med hele koefficienter.

π som projekt i gymnasiet

Der er flere muligheder i et projekt om tallet π. Jeg vil umiddelbart pege på fire:

1) Metoder til beregning af π.
   Det vil sige formler, der faktisk kan bruges af en computer.
2) Formler for π.
   Det vil sige formler, hvor π indgår på overraskende vis.
3) Entydigheden af π.
   Det vil sige problemet, at det er det samme irrationale tal, der optræder i formlerne for cirklens omkreds og areal, kuglens overflade og rumfang, osv.
4) Cirklens kvadratur.
   Det vil sige, at π ikke kan udtrykkes ved kvadratrodstegn, men at det ligefrem er et transcendent tal, der ikke kan udtrykkes ved rodtegn overhovedet.

Man kan hente informationer i den nedenfor nævnte litteratur. Men henvisningerne[5,8,11] er kun egnet til at snuse i. - de er ikke skrevet med det formål at være gymnasiestof.

I ref. 1 udledes Viète's formel (1579):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

og Wallis' produkt (1650):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots}$$

I ref. 2 & 3 bevises sætningerne, at en cirkel er lige så stor som en retvinklet trekant med cirklens radius og omkreds som kateter, og at en kugleflade er lige så stor som cirklen, der har kuglens diameter som radius. Det er det sidste resultat, Archimedes er så stolt over, at han siger: "Sådan har det været siden tidernes morgen, men jeg er den første, der har vidst det!"

Bevisteknikken er noget besværliggjort af, at man ikke havde en bekvem grænseovergang. Hans beviser kan derfor virke indviklede. Samtidig er de af indirekte form; dvs., at man antager, at det søgte resultat er forkert, og dernæst udleder, at denne antagelse fører til en modstrid. Derfor er det søgte resultat korrekt. Denne tankegang er jo uvant i vore dages skolematematik.

Ref. 4 er en udførlig og lettilgængelig fremstilling af alle aspekter af π. Kun de nyeste beregninger er ikke kommet med.

I ref. 5 forklares metoderne til beregning af en milliard decimaler af π. Disse beregninger bruger formler, der er fundet af det indiske geni, S. Ramanujan, (1887-1920). Ingen af hans formler er lettilgængelige, men det er morsomt at se, hvor mange forskellige, der er. Heller ikke metoderne til at regne med så store tal er helt simple. I alt en artikel, man kan snuse lidt til.

Edgar's artikel[6] giver en glimrende oversigt over de forskellige formlers anvendelighed til beregning af π, samt beregningseksempel med Machin's formel.

I ref. 7 gives π's historie rimeligt udførligt med mange detaljer som løste opgaver.

Ref. 8 er nærmest en forkortet oversættelse til dansk af ref. 5. Kun egnet til at snuse til.

I ref. 9 gennemgås Archimedes med vægt på den klassiske bevisteknik. Desuden bevises Wallis' og Vi\'ete's formler samt Leibniz' række. Endelig forklares meningen med cirklens kvadratur.

Også i ref. 10 gennemgås Archimedes, og flere formler nævnes.

Remmert's artikel[11] er tænkt til ældre studerende med kendskab til komplekse funktioner. Men artiklen er interessant at snuse i, fordi den indeholder mange formler, og den giver en antydning af beviser, f.eks. Eulers eget for summen af de reciprokke kvadrater. Desuden omtales cirklens kvadratur.

Ref. 12 er medtaget for sin sjove idé, at følge Archimedes indtil 8-kanten, og så extrapolere ud fra omkredsene af en to-kant, en trekant, et kvadrat, en sekskant og en ottekant. Med denne simple teknik fås de første 9 decimaler i π.

Referencer

1) Leif Abrahamsson: *Två formler för talet* π. Välj specialarbete i matematik, udg. Dan Laksov, Mittag--Leffler institutet, Djursholm 1989.
2) Archimedes: *Kykloy metresis*. Syrakus 200 f.v.t. Measurement of a Circle, The Works of Archimedes, edited in modern notation by T. L. Heath, Cambridge 1896.
3) Archimedes: *Peri sphæras kai kylindros*. Syrakus 200 f.v.t. On the Sphere and Cylinder, The Works of Archimedes, edited in modern notation by T. L. Heath, Cambridge 1896.

4) Petr Beckmann: *A history of* π. Dorset Press, New York 1971.

5)* J. M. Borwein, P. B. Borwein and D. H. Bailey: *Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to PI, or how to compute one Billion Digits of PI.* Am. Math. Monthly, **96**, 1989, 201-219.

6) G. A. Edgar: *Pi: Difficult or Easy?* Math. Magazine, **60**, 1987, 141-150.

7) Howard Eves: *An introduction to the history of mathematics.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

8)* Mogens Esrom Larsen: *π med en milliard decimaler.* Normat **38**, 1990, 112-114.

9) Jesper Lützen: *Cirklens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling*, Systime, Gjellerup, 1985.

10) Lars Mejlbo: *Om tallet π=3,141592...* i Nogle kapitler af matematikkens historie, Elementærafdelingen, nr. 17, vol. 1, Udg. Kirsti Andersen. Århus 1979, 68-81.

11)* R. Remmert: *What is π?* Numbers, udg. H.-D. Ebbinghaus o.a., Springer, New York, 1990, 123-153.

12) H. R. Schwarz: *Numerical analysis.* John Wiley & Sons, New York, 1989, 100-113.

* Egentlig for svære for gymnasiet.

Mogens Esrom Larsen er ansat ved Københavns Universitets matematiske institut som lektor. Medlem af redaktionen af KVANT.