LOGICOMIX ELLER JAGTEN PÅ SANDHED

Mogens Esrom Larsen
16. august 2012

Institut for Matematiske Fag
Matematisk Afdeling
Københavns Universitet

En anmeldelse af en tegneserie.

Apostolos Doxiadis og *Christos H. Papadimitriou* har lavet en tegneserie med tegninger af *Alecos Papadatos* og *Anni Di Donna* om logikkens historie. Tegneserien er oversat til dansk af *Poul Einar Hansen* (1939–) og udgivet af forlaget politisk revy i 2012.

Apostolos Doxiadis er allerede kendt for romanen "Onkel Petros og Goldbachs formodning," der udkom på dansk i 2000. Formodningen går ud på, at ethvert lige tal større end 2 kan skrives som summen af to primtal. (4=2+2, 6=3+3, 8=3+5)

Russells biografi.

Tegneseriens historie er fortalt som en biografi af den i sammenhængen centrale figur *Bertrand Russell* (1872–1970), med fiktive møder med andre vigtige bidragydere. Jeg nævner sidetallene for deres forekomst i tegneserien. Fx *Georg Cantor* (1845–1918) s 134 ff, 323, *Gottlob Frege* (1848–1925), s 120 ff, 171, 325, *David Hilbert* (1862–1943) s 145 ff, 168, 281 ff, 326, *Ludwig Wittgenstein* (1889–1951) s 224 ff, 342, og *Kurt Gödel* (1906–78) s 273, 326. Det var nu ikke mange af disse, Russell mødte i virkeligheden.

Logikkens historie.

Logikken starter med *Aristoteles* (384–322) s 320, der formulerer logikkens eneste regel, senere døbt "modus ponens," der siger, at hvis vi ved, at udsagnet p er sandt, og kan udlede, at p medfører sandheden af udsagnet q, skrevet $p \Rightarrow q$, så kan vi stole på, at udsagnet q også er sandt. Det lyder jo besnærende.

Men problemet er, at man kan formulere disse to udsagn uden af forudsætte, at de to elementære udsagn, p og q, har noget med hinanden at gøre. Så bliver sandheden af implikationen, $p \Rightarrow q$, et spørgsmål om sandheden af de to indgående udsagn. Man definerer sandheden af implikationen som påstanden, at enten er p *falsk* eller også er q *sand.* Eller at implikationen er falsk, hvis og kun hvis p er sand og q falsk. Med andre ord: Af en falsk forudsætning kan alt sluttes!

Boolesk algebra.
Denne måde at behandle logikken på skyldes især *George Boole* (1815–64) s 100 ff, 322 og er noget anderledes end vore umiddelbare forventninger. Med negationsbetegnelsen $\neg$ og de logiske symboler for "og," $\wedge$, og "eller," $\vee$, kan vi skrive implikationen som $(\neg p) \vee q$. Forudsætningen i modus ponens kan derfor skrives

$$p \wedge ((\neg p) \vee q)$$

I den algebraiserede logik kan vi regne på udtrykket, vi "ganger" ind i parentesen og finder

$$(p \wedge (\neg p)) \vee (p \wedge q)$$

Første parentes er altid falsk, så vi må antage, at anden parentes er sand. Men så er det ikke overraskende, at vi slutter, at q er sand.

Vore uvaner?.
Men vi er jo tilbøjelige til at skrive et ræsonnement på formen

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r$$

og mener hermed at have sagt

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$$

Men algebraisk plejer det treleddede udtryk at skulle mene, at man kan hæve parenteserne i de ensbetydende udtryk

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \text{ og } p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

Men i begge de tilfælde, hvor både p og r er falske, så er venstre udsagn falsk, mens højre udsagn er sand. Parenteserne kan ikke bare hæves!
Endnu værre går det med dobbeltimplikationen, der skrives $p \Leftrightarrow q$ i betydningen

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Her er det i orden at hæve parenteserne til udtrykket

$$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$$

Det kedelige er bare, at udtrykket er sandt, netop når et ulige antal af de tre indgående udsagn er sande.

Da alt skulle bevises.

Ikke desto mindre førte begejstringen for logikkens magt over sandheden i det 19. århundrede til den fornemmelse, at alle påstande om fx tal eller rum skulle kunne afgøres ved logiske ræsonnementer ud fra nogle grundliggende antagelser, ofte benævnt med det græske ord for "krav," *axiom.* Frege gav sig i kast med at skrive en axiomatisk teori for de naturlige tals algebraiske egenskaber, og Hilbert fremsatte på kongressen i Paris 1900 det projekt, at afgøre alle påstande med beviser, enten for sandheden eller det modsatte.

Russells paradox s 163.

Men mængdelæren gav allerede tidligt anledning til problemer. Mængder af mængder har jo mængder som elementer, så man kan kan nærliggende definere en anstændig mængde som en, der ikke har sig selv som element. Så vi vil begrænse os til mængden af anstændige mængder, A. Og nu vil vi så afgøre, bevise eller modbevise, spørgsmålet, om A selv er anstændig. Men efter definitionen gælder:

$$((A \in A) \Rightarrow (A \notin A)) \wedge ((A \notin A) \Rightarrow (A \in A))$$

Dette berømte paradox, der skyldes Russell (1901), rystede Frege og førte til, at Russell sammen med *Alfred North Whitehead* (1861–1947) s 114 ff, 342, gav sig i kast med et enormt projekt, "Principia Mathematica" s 176, der skulle give matematikken et solidt logisk grundlag. Tricket var, at definere et hierarki af klasser, så selvreferencer var udelukkede. Dette projekt viste sig at løbe ud i sandet.

Jagten på sandhed.

Problemet med sandheden er ikke logisk. Fx kan Goldbachs formodning sagtens være sand uden at kunne bevises. Hilberts problems løsning kom i 1931, da Gödel viste, at i et axiomsystem, der kan definere de naturlige tal, vil der være uafgørlige påstande og sandheder, der ikke kan bevises. Så projektet var for ambitiøst.

Inden da havde Wittgenstein udgivet sin opfattelse i værket "Tractatus Logico-Philosophicus,' s 288, der i det væsentlige slår til lyd for den sandhedsopfattelse, at en sætning er sand, hvis det, den udtrykker er rigtigt. Logikken er ligegyldig, vi må referere til en omverden, som sætningen handler om. Goldbachs formodning handler om, at hver gang vi betragter et lige tal, så findes de to primtal. Wittgensteins værk slutter med sætning 7: *Wofon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen.* I David Faurholts ubehjælpsomme oversættelse lyder sætningen: *Det man ikke kan tale om, om det må man tie.* Ofte citeret.

Niels Bohrs dybe sandhed.

I dette blad kan jeg ikke nære mig for at nævne Niels Bohrs definition af en "dyb sandhed," nemlig den, at det er en sand sætning, hvis modsætning også er sand. Et eksempel er sætningen: "Denne sætning består af seks ord." Tæl selv. Negationen siger jo: "Denne sætning består ikke af seks ord." Tæl igen.

Ringens herre!.
Et eksempel på den fysiske verdens forbløffende sammenhæng med logikken er følgende: Lad os tænke os en kommode med to skuffer. På den ene skuffe skriver vi: “Ringen er i den anden skuffe.” På den anden skuffe skriver vi: “Netop én af sætningerne på skufferne er sand.”
Nu kan de to påstande jo være sande eller falske. Det ved vi ikke. Men hvis nu den første sætning er falsk, så må den anden sætning være sand eller falsk efter eget valg. Altså uafgørlig, men uskyldig. Der er bare det ved det, at hvis vi flytter ringen til den anden skuffe, så den første sætning bliver sand, så bliver den anden sætning selvmodsigende! Så om den er paradox eller ej, afhænger af, hvor vi placerer ringen!

Tegneserien.
Tegneserien genfortæller Russells liv, som det var med forældre, koner, børn og engagementet i fredssagen. Han sad endda et halvt år i fængsel for militærnægtelse under første verdenskrig. Historien krydres så af de tænkte møder med de i indledningen nævnte aktører i logikkens udviklingshistorie. Så man må vel klassificere den som eventyr. Men det er en underholdende måde at få beskrevet en væsentlig erkendelsesudvikling.

Litteratur.
Foruden alle de nævnte værker har *Raymond M. Smullyan* skrevet en række fremragende bøger om logik, den sidste hedder *Logical Labyrinths* udgivet af A. K. Peters 2009.
På dansk har *Peter Øhrstrøm* (1949–) udgivet bogen *Logisk set* på forlaget systime i 1992.