Opgave – En tryllekunst

Tryllekunstneren og hans assistent præsenterer publikum for 8 mønter på en række. Tryllekunstneren instruerer publikum om opgaven og forlader lokalet. Publikum vælger nu for hver mønt, om den skal være krone eller plat. Derefter oplyser publikum assistenten om deres foretrukne mønt, fx nr 5 fra venstre. Nu vender assistenten én af mønterne om efter sit valg.

Tryllekunstneren kommer ind fra kulissen og udpeger den foretrukne mønt.

Hvordan bærer de sig ad? Hvad er den hemmelige kode?

Opgave – En sum

I Amer. Math. Monthly April 2008 stilles som problem 11356 en opgave af Michael Poghosyan, Yerevan State University, Yerevan, Armenien.

Vis identiteten

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1)\binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$$

Opgave – Sokker, der passer til hinanden

Når sandsynligheden for at få to røde sokker er $\frac{1}{2}$, når man trækker to tilfældigt ud af en sæk med røde og sorte sokker, hvor mange er der så af hver farve i sækken?

Opgave – Travle duellanter

Duellerne i Travløse er sjældent fatale. Hver kombattant møder op på et tilfældigt tidspunkt mellem 5 og 6 om morgenen på den aftalte dag, venter 5 min på sin modstander, og går igen, hvis denne ikke er mødt op. Ellers slås de to.

Hvad er sandsynligheden for, at det kommer til kamp?

Opgave – Eksponentielt

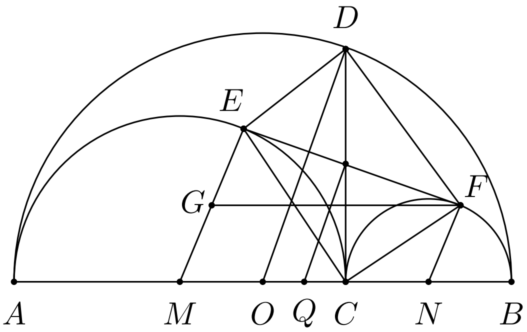
Når man får at vide, at tallet 2^{29} er 9–cifret, og at de 9 cifre alle er forskellige, kan man så uden at udregne tallet bestemme, hvilket ciffer der mangler?

Opgave – Trekantet

En trekant er tegnet på ternet papir, så alle tre hjørner er i skæringspunkter (punkter med heltallige koordinater). Lad nu r være antallet af skæringspunkter på randen og i antallet af skæringspunkter i det indre af trekanten. Vis, at arealet af trekanten er

$$i + \tfrac{1}{2}r - 1$$

Svar – Firkantet



Lad C være et vilkårligt punkt på liniestykket AB mellem A og B, og tegn halvcirkler til samme side over diametrene AB, AC og CB. Lad D være det punkt på halvcirklen AB, der har CD vinkelret på AB, og lad EF være fællestangenten til de to små halvcirkler.

Vis, at $ECFD$ er et rektangel.

For at bevise, at $ECFD$ er et rektangel, vil jeg bevise, at diagonalerne CD og EF er lige lange og halverer hinanden.

Af symmetrigrunde kan vi antage $R \geq r$, og da tilfældet $R = r$ er såre nemt, vil jeg nøjes med at se på tilfældet $R > r$.

Man ser, at $|MO| = (R + r) - R = r$, $|OC| = R - r$, og $|MN| = R + r$. Da radierne ME og NF er vinkelrette på fællestangenten EF, er de parallelle. Lad punktet G på ME være bestemt således, at $GF \| MN$. Så er $MNFG$ et parallelogram, og der gælder $|GF| = |MN| = R + r$, $|MG| = |NF| = r$, og altså $|GE| = R - r$.

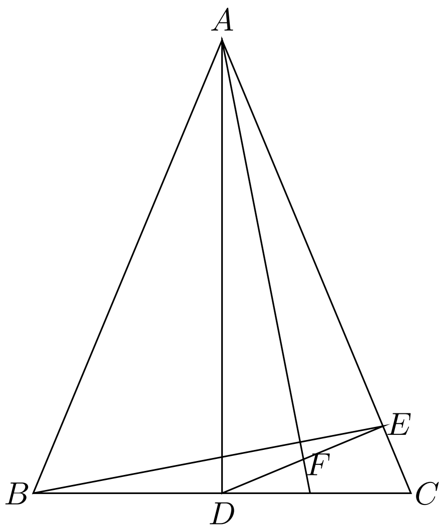
I de retvinklede trekanter $\triangle OCD$ og $\triangle GEF$ gælder om hypotenuserne $|OD| = R + r = |GF|$, og om kateterne $|OC| = R - r = |GE|$. Altså er $\triangle OCD$ kongruent med $\triangle GEF$, og følgelig er $|CD| = |EF|$ som var den ene af de to påstande, jeg ville bevise.

Jeg skal også bevise, at CD og EF har samme midtpunkt. Lad Q være midtpunktet af OC. Den midtpunktstransversal i $\triangle OCD$, der forbinder Q med midtpunktet af CD har længde $\frac{1}{2}|OD| = (R + r)/2$, og den er parallel med OD.

Nu er Q også midtpunkt af siden MN i trapezet $MNFE$, så den midtpunktstransversal i dette trapez, der forbinder Q med midtpunktet af EF har længde $\frac{1}{2}(|ME| + |NF|) = (R+r)/2$, og den er parallel med ME og NF.

Vender vi tilbage til kongruensen mellem trekanterne $\triangle OCD$ og $\triangle GEF$, får vi, at $\angle COD = \angle EGF$, og altså, at OD er parallel med ME. Heraf ses, at de to omtalte midtpunkttransversaler er sammenfaldende, og altså, at midtpunkterne af linjestykkerne CD og EF er sammenfaldende.

Svar – Trekantet



Trekanten $\triangle ABC$ er ligebenet med $AB = AC$, D er midtpunktet på BC, E på AC er det punkt, hvor ED er vinkelret på AC og F er midtpunktet af DE.

Vis, at AF står vinkelret på BE.

I trekanterne $\triangle EDA$ og $\triangle ECD$ er tilsvarende sider vinkelrette på hinanden: $ED \perp EC$, $DA \perp CD$, og $AE \perp DE$. Det følger, at trekanterne er ensvinklede og derfor ligedannede, og man ser, at en rotation omkring E med vinklen $\frac{\pi}{2}$ efterfulgt af en multiplikation i forholdet $|EC| / |ED|$ fører $\triangle EAD$ over i $\triangle EDC$. Ved denne afbildning føres ED's midtpunkt F over i EC's midtpunkt G, og AF føres over i DG.

Altså er $AF \perp DG$, og da DG som midtpunktstransversal i $\triangle BEC$ er parallel med BE, er AF vinkelret på BE, QED.

Svar – Kvadratisk

n er et helt tal, så $2n + 1$ er et kvadrattal. Vis, $n + 1$ er sum af to sukcessive kvadrattal.

Hvis det ulige tal $2n + 1$ er et kvadrattal m^2, er m ulige: $m = 2k + 1$, og $2n + 1 = 4k^2 + 4k + 1$, der giver

$$n + 1 = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k + 1)^2 \, .$$