Opgave – Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke $\frac{2^n+1}{n^2}$ er et helt tal.

Opgave – Trekantet

I en spidsvinklet trekant $\triangle ABC$ skærer vinkelhalveringslinien fra A siden BC i punktet L og den omskrevne cirkel i punktet N. Fra punktet L nedfældes de vinkelrette på AB og AC, fodpunkterne kaldes hhv. K og M.

Vis, at firkanten $AKNM$ har samme areal som trekanten $\triangle ABC$.

Opgave – Retvinklet

$\triangle ABC$ er retvinklet med den rette vinkel i A. Lad D være fodpunktet for højden fra A. Linien gennem centrene for de indskrevne cirkler i trekanterne $\triangle ABD$ og $\triangle ACD$ skærer siderne AB og AC i hhv. K og L.

Vis at arealet af $\triangle AKL$ er højst halvt så meget som arealet af $\triangle ABC$.

Opgave – Begge dele

Lad D være et punkt inden i en spidsvinklet trekant, $\triangle ABC$, sådan at

$$\angle ADB = \angle ACB + 90^o \text{ og } AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

(a) Beregn værdien af forholdet
$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$$

(b) Vis, at tangenterne fra C til de omskrevne cirkler for trekanterne $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$ står vinkelret på hinanden.

Opgave – Elementært

Lad n være et positivt helt tal og lad $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ være delmængder af en mængde, B. Antag, at

(a) hver mængde A_i har netop $2n$ elementer,

(b) hver fællesmængde $A_i \cap A_j$, $i \neq j$, har præcis *ét* element,

(c) hvert element i B ligger i mindst to af mængderne A_i.

For hvilke værdier af n kan man give hvert element i B en værdi, 0 eller 1, sådan at hver mængde A_i har nøjagtig n elementer af værdi 0?

Svar – Kvadratur

Lad d være et naturligt tal, så $d \notin \{2,5,13\}$. Vis, at der findes $a \neq b$, $a,b \in \{2,5,13,d\}$, som opfylder, at $ab-1$ ikke er et kvadrattal.

Da $2 \cdot 5 - 1$, $2 \cdot 13 - 1$ og $5 \cdot 13 - 1$ alle er kvadrattal, er det klart, at vi "må sætte vor lid til" d sammen med et af tallene 2, 5 og 13.

Idet vi fører beviset indirekte, antager vi altså, ad d kan vælges som et naturligt tal, sådan at

$$2d-1, \quad 5d-1 \text{ og } 13d-1 \text{ alle er kvadrattal.}$$

Det ses let, at modulo 16 er ethvert kvadrattal kongruent med enten 0, 1, 4 eller 9. Ifølge vor antagelse gælder altså, at

$$\begin{aligned}
&2d \text{ er kongruent med } 1,2,5 \text{ eller} 10; \text{ dvs.}\\
&d \text{ er kongruent med } 1,9,5 \text{ eller } 13 \text{ modulo } 16;\\
&5d \text{ er kongruent med } 1,2,5 \text{ eller} 10; \text{ dvs.}\\
&d \text{ er kongruent med } 13,10,1 \text{ eller } 2 \text{ modulo } 16;\\
&13d \text{ er kongruent med } 1,2,5 \text{ eller} 10; \text{ dvs.}\\
&d \text{ er kongruent med } 5,10,9 \text{ eller } 2 \text{ modulo } 16.
\end{aligned}$$

Da intet naturlig tal, d, tilfredsstiller kravene i alle de sidste tre linjer, har vor antagelse ført frem til en modstrid; dvs. påstandens rigtlighed følger.

Svar – Funktionalt

Find alle funktioner på den ikke–negative reelle akse ind i sig selv, som opfylder

$$\begin{aligned}
(i) &\quad f(xf(y))f(y) = f(x+y) \quad \text{for alle } x,y,\\
(ii) &\quad f(2) = 0,\\
(iii) &\quad f(x) \neq 0 \quad \text{for } 0 \leq x < 2.
\end{aligned}$$

Sæt først $y = 2$. Så følger af (i) og (ii), at $f(x+2) = 0$ for alle $x \geq 0$, dvs

$$f(x) = 0 \text{ for alle } x \geq 2.$$

Lad nu y være vilkårligt med $0 \leq y < 2$, og vælg $x = 2 - y$. Så er $f(x+y) = 0$, og da $f(y) \neq 0$ ifølge (iii), følger det, at $f(xf(y)) = 0$, og altså $xf(y) \geq 2$, dvs

$$f(y) \geq \frac{2}{2-y}.$$

Der kan imidlertid ikke gælde $f(y) > \frac{2}{2-y}$. Antag nemlig dette og vælg $x = \frac{2}{f(y)}$.

Så er på den ene side $xf(y) = 2$, der giver $f(xf(y)) = 0$ og altså $f(x+y) = 0$, og på den anden side

$$x + y = \frac{2}{f(y)} + y < 2 - y + y = 2,$$

der medfører $f(x+y) \neq 0$.

Der er altså kun muligheden

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x}, \text{ hvis } 0 \le x < 2, \\ 0, \text{ hvis } x \ge 2. \end{cases}$$

Det er bemærkelsesværdigt, at vi af (i) kun har udnyttet, at $f(x+y) \neq 0$, hvi og kun hvis $f(xf(y)) \neq 0$ og $f(y) \neq 0$.

Det er derfor i højeste grad nødvendigt at eftervise, at den fundne funktion faktisk opfylder (i), men det er let at verificere.

Svar – Rød eller hvid?

Givet en endelig mængde af punkter i planen, alle med heltallige koordinater. Vis, at man altid kan farve dem røde og hvide, så alle har en af farverne, og således at for enhver akseparallel linie vil antallet af røde og antallet af hvide på linien højst afvige med 1.

Vi starter med at konstruere en graf, hvis hjørner er de givne punkter. Kanterne tilføjes en ad gangen, idet følgende betingelser overholdes:

1. en kant er enten en $X-kant$ parallel med $X-$aksen eller en $Y-kant$ parallel med $Y-$aksen,
2. fra et vilkårligt hjørne udgår der højst en $X-$kant og højst en $Y-$kant.

indtil det ikke er muligt at tilføje flere kanter.

Herefter farves punkterne således, at to punkter, der er forbundne med en kant, altid gives hver sin farve. At dette er muligt ses ved at vælge et vilkårligt punkt og give det en vilkårlig farve, og derefter gennemløbe den vej, som punktet tilhører, idet punkterne skiftevis farves røde og hvide. Da de kanter, som indgår i en vej skiftevis er $X-$kanter og $Y-$kanter, er antallet af punkter på en eventuel lukket vej lige, og altså den angivne farvning af en vilkårlig vej mulig uanset om vejen er lukket eller ej. Når en vej er farvet, fjernes den fra grafen, og man fortsætter med at farve en vej ad gangen, indtil hele grafen er farvet.

Betragt nu en vilkårlig akseparallel linje, fx en linie parallel med $X-$aksen. De punkter på linjen, der ligger på $X-$kanter, optræder parvis således, at der er lige mange røde og hvide. Ud over disse punktpar kan linjen højst indeholde et af de givne punkter, for hvis der var flere, kunne to af dem forbindes med en $X-$kant i modstrid med antagelsen om, at det ikke er muligt at tilføje flere kanter. Antallet af røde og hvide punkter på linjen afviger højst med 1.

Svar – Kombinatorik

Lad $p_n(k)$ være antallet af permutationer af n elementer med netop k fixpunkter. Vis formlen

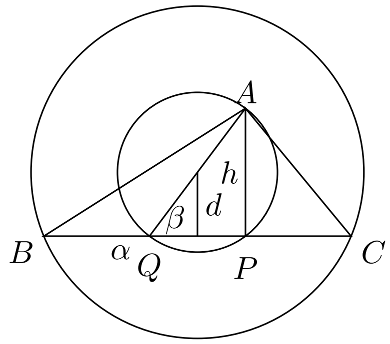
$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$$

Venstre side kan fortolkes som antallet af fixpunkter i samtlige permutationer af de n elementer. Nu er ethvert punkt fixpunkt for netop $(n-1)!$ permutationer, og da punktet kan vælges på n måder, følger påstanden.

Svar – Cirkler

Givet to koncentriske cirkler med radier $R > r$. Lad P være et fast punkt på den lille cirkel, og lad B være et variabelt punkt på den store. BP skærer den store yderligere i C. Den vinkelrette linie til BP i P skærer den lille cirkel ydeligere i A.

Find værdierne af $BC^2 + CA^2 + AB^2$.



BP's andet skæringspunkt med den lille cirkel betegnes Q, og BC's midtpunkt betegnes M. Længden af OM betegnes d, længden af AP betegnes h, længden af BM betegnes α, og længden af QM betegnes β.

Så er $h = 2d$, $\alpha^2 = R^2 - d^2$, og $\beta^2 = r^2 - d^2$.

Endvidere er enten $BP = \alpha + \beta$ og $CP = \alpha - \beta$ eller omvendt.

Altså er

$$\begin{aligned} & BC^2 + CA^2 + AB^2 \\ =& 4\alpha^2 + h^2 + CP^2 + h^2 + BP^2 \\ =& 4R^2 + 4d^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 \\ =& 4R^2 + 4d^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 \\ =& 6R^2 + 2r^2 \end{aligned}$$

for enhver beliggenhed af B.

Svar – En ulighed

Lad a, b og c være positive reelle tal, der opfylder $abc = 1$.

Vi, at

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lad $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ og $z = \frac{1}{c}$, der også opfylder $xyz = 1$. Da

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3yz}{y+z} = \frac{x^2}{y+z}$$

Bliver uligheden til

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{3}{2}$$

Lad

$$\alpha = \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{x+z}}, \frac{z}{\sqrt{y+x}}\right)$$

og

$$\beta = \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{x+z}, \sqrt{y+x}\right)$$

Cauchy–Schwarz' uliglhed giver da

$$\alpha \cdot \alpha\beta \cdot \beta \geq \alpha \cdot \beta^2$$

altså

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x}\right) \cdot \\ &(y+z+x+z+y+x) \\ &\geq x+y+z\end{aligned}$$

eller

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x}\right) \geq \frac{x+y+z}{2}$$

Men da det aritmetiske gennemsnit er større end eller lig med det geometriske, er $x+y+z \geq 3$. Heraf følger uligheden.

Svar – Endnu et kvadrat

Lad a og b være naturlige tal, der opfylder, at $ab+1$ går op i a^2+b^2. Vis, at

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

er et kvadrattal.

Betragt ligningen

$$a^2+b^2 = q(ab+1)$$

og søg dens heltallige løsninger med $q > 0$. Betragt løsningen med $a+b$ mindst. Vi kan antage, at $a \leq b$. Da er $b > 0$, når $q > 0$. Vi kan jo skrive ligningen

$$b(qa-b) = a^2 - q$$

Betragt $c = qa - b$, da gælder $bc < a^2 \leq b^2$, så $c < b$. Da $b = qa - c$, giver det $c(qa-c) = a^2 - q$ i modstrid med minimaliteten af $a+b$, med mindre $c < 0$.

vi har altså uligheden $qa < b$. Da $1 \leq -c$, fås $qa < -cb = q - a^2$, så $q(a-1) < -a^2$ og derfor $a - 1 < 0$. Altså er $a = 0$. Men så er jo $q = b^2$.

Svar – Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke $\frac{2^n+1}{n}$ er et helt tal.

Løsningen er ikke pæn. Opgaven er da også opstået ved en trykfejl. Løsninger er $n = 3^k$, men også fx. 171.

Svar – En divisor

Find alle hele tal a, b og c med $1 < a < b < c$ som opfylder, at $(a-1)(b-1)(c-1)$ er en divisor i $abc - 1$.

De eneste løsninger er (2,4,8) og (3,5,15).

Sæt $x = a-1$, $y = b-1$ og $z = c-1$. Så er tallet

$$\begin{aligned}&\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyz} \\ =&\frac{xyz+yz+zx+xy+x+y+z}{xyz}\end{aligned}$$

Et helt tal, som vi kan kalde $k+1$. Så er

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=k$$

Da $1 \le x < y < z$ fås $2 \le y$ og $3 \le z$, hvoraf $k < 3$. Hvis $x \ge 3$, fås $k < 1$. Så x er enten 1 eller 2. Hvis $x = 1$, så er $k = 2$. så ligningen reduceres til $(y-2)(z-2) = 5$, der må give $y = 3$ og $z = 7$. Hvis $x = 2$, fås

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{yz}=k$$

Da $y \ge 3$ og $z \ge 4$, fås $k = 1$. Så ligningen bliver $(y-3)(z-3) = 11$. Altså bliver $y = 4$ og $z = 14$.

Svar – Og en anden divisor

Find alle positive hele tal a og b som opfylder, at ab^2+b+7 er en divisor i a^2b+a+b.

Lad $A = a^2b+a+b$ være delelig med $B = ab^2+b+7$. Så er også $Ab - Ba = b^2 - 7a$ delelig med B. Hvis $b^2 - 7a = 0$, så er $a = 7c^2$ og $b = 7c$ og $A = Bc$.

Antag derfor $b^2 - 7a \neq 0$. Da $ab^2+b+7 \le |b^2-7a|$ gælder enten $b^2 - 7a \ge ab^2+b+7$ eller $7a - b^2 \ge ab^2+b+7$. Den første ulighed kan ikke opfyldes. Den anden kan skrives $(7-b^2)a \ge b^2+b+7$, så b må være enten 1 eller 2. For $b = 1$ Det giver mulighederne $a = 11$ og $a = 49$. $b = 2$ giver ingen løsninger.