Opgave Kvadratur

Lad d være et naturligt tal, så $d \notin \{2, 5, 13\}$. Vis, at der findes $a \neq b$, $a, b \in \{2, 5, 13, d\}$, som opfylder, at $ab - 1$ ikke er et kvadrattal.

Opgave Funktionalt

Find alle funktioner på den ikke–negative reelle akse ind i sig selv, som opfylder

$$\begin{aligned} (i) \quad & f(xf(y))f(y) = f(x+y) \quad \text{for alle } x, y, \\ (ii) \quad & f(2) = 0, \\ (iii) \quad & f(x) \neq 0 \quad \text{for } 0 \leq x < 2. \end{aligned}$$

Opgave Rød eller hvid?

Givet en endelig mængde af punkter i planen, alle med heltallige koordinater. Vis, at man altid kan farve dem røde og hvide, så alle har en af farverne, og således at for enhver akseparallel linie vil antallet af røde og antallet af hvide på linien højst afvige med 1.

Opgave Kombinatorik

Lad $p_n(k)$ være antallet af permutationer af n elementer med netop k fixpunkter. Vis formlen

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$$

Opgave Cirkler

Givet to koncentriske cirkler med radier $R > r$. Lad P være et fast punkt på den lille cirkel, og lad B være et variabelt punkt på den store. BP skærer den store yderligere i C. Den vinkelrette linie til BP i P skærer den lille cirkel ydeligere i A.
Find værdierne af $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

Opgave En ulighed

Lad a, b og c være rellele tal, der opfylder $abc = 1$.
Vi, at

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Opgave Endnu et kvadrat

Lad a og b være naturlige tal, der opfylder, at $ab + 1$ går op i $a^2 + b^2$. Vis, at

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

er et kvadrattal.

Opgave Heltalligt

Bestem alle hele tal, $n > 1$, for hvilke $\frac{2^n+1}{n}$ er et helt tal.

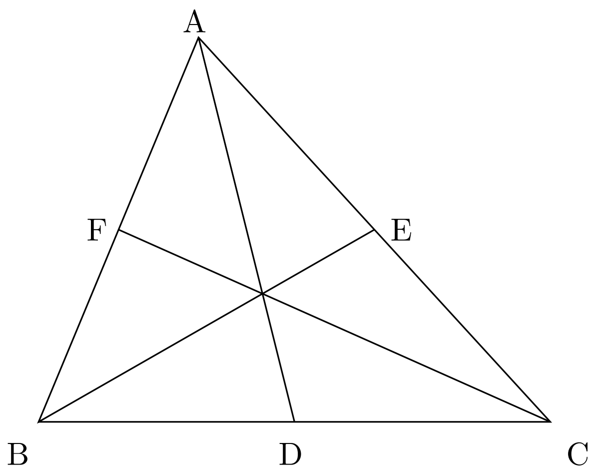
Opgave En divisor

Find alle hele tal a, b og c med $1 < a < b < c$ som opfylder, at $(a-1)(b-1)(c-1)$ er en divisor i $abc - 1$.

Opgave Og en anden divisor

Find alle positive hele tal a og b som opfylder, at $ab^2 + b + 7$ er en divisor i $a^2b + a + b$.

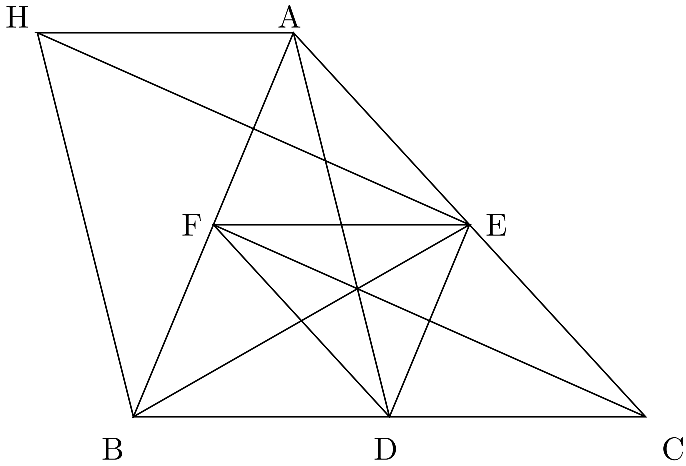
Svar – Noget om medianerne



I en trekant, $\triangle ABC$, er tegnet de tre medianer, dvs. at f. eks. D er midtpunktet af liniestykket BC. Trekanten $\triangle DEF$ er ligedannet med $\triangle ABC$, og da siderne er halvt så lange, er dens areal en fjerdedel. Også hver af de tre trekanter, $\triangle AEF$, $\triangle BDF$, og $\triangle CDE$ er ligedannede med den oprindelige i halv størrelse og derfor af areal en fjerdedel.

Man kan nu tegne en trekant med siderne af længde som de tre medianer, AD, BE og CF. Opgaven går ud på at vise, at denne mediantrekants areal er $\frac{3}{4}$ af trekantens, $\triangle ABC$.

Vi tegner mediantrekanten som $\triangle BEH$, så $BH = AD$ og $EH = CF$.



Så er AH parallel med BC og EF, og derfor er trekanten $\triangle EFH$ lige stor med $\triangle AEF$ og har derfor arealet en fjerdedel. Tilsvarende er $\triangle BEF$ lige stor med $\triangle BDF$ og derfor af arealet en fjerdedel. Endelig er $\triangle BFH$ lige stor med $\triangle DEA$ (parallelforskydning), som er lige stor med $\triangle DEF$ og derfor af arealet en fjerdedel. Tilsammen de ønskede $\frac{3}{4}$.

Svar – Diophantisk

Find samtlige heltallige løsninger til

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 b^2$$

$a = b = c = 0$ er en løsning.
Hvis $c = 0$, så er $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 1$, der kun har løsningen $a = b = 0$.
Vi kan derfor nøjes med at søge løninger, hvor alle tre tal er naturlige. Hvis a eller b er ulige, fås $c^2 \equiv 3(4)$ – en modstrid. Derfor er alle 3 tal lige. Lad nu $a = 2^n p$, $b = 2^m q$ og $c = 2^\ell r$, hvor p, q og r er ulige. Antag f. eks. at $m \leq n$. Vi har så ligningen

$$2^{2(n+m)} p^2 q^2 - 2^{2n} p^2 - 2^{2m} q^2 = 2^{2\ell} r^2$$

Heraf følger, at $m \leq \ell$. Vi kan derfor forkorte ligningen til

$$2^{2n} p^2 q^2 - 2^{2(n-m)} p^2 - q^2 = 2^{2(\ell-m)} r^2$$

Hvis $m < n$, er venstre side kongruent med 3 modulo 4, hvad højre side ikke kan være. Og hvis $m = n$, står der

$$2^{2n} p^2 q^2 - p^2 - q^2 = 2^{2(\ell-m)} r^2$$

hvor venstre side er kongruent med 2 modulo 4, mens højre side ikke er.

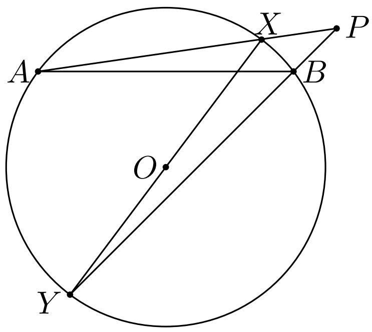
Svar – Babylonisk

Ni matematikere mødes til en international konference og opdager, at blandt hver tripel er der to, som taler et fælles sprog. Hvis vi yderligere ved, at hver matematiker højst taler tre sprog, så skal man vise, at der er tre matematikere, der taler et fælles sprog.
Lad os kalde et sprog for et **fællessprog,** hvis (og kun hvis) mindst to af matematikerne taler det. Endvidere tænker vi os 27 punkter fordelt jævnt på en cirkel, 3 punkter for

hver matematiker. For hver matematiker farver vi et punkt med en farve svarende til det fællessprog, hun taler mens eventuelle overskydende punkter, der svarer til et sprog, hun har for sig selv, eller mangelen på et sprog, fjernes. Nu forbinder vi de punkter, der har samme farve, med liniestykker, der så får den pågældende farve. Hvis der er to liniestykker med samme farve, er der mindst tre, der taler det tilsvarende fællessprog. Vi går derfor ud fra, at liniestykkerne har forskellige farver. Af dem kan der højst være 13. Da disse forbinder 26 punkter, må der være et punkt, der er fjernet. Der er altså mindst én matematiker, A, der højst har to punkter. Hun taler derfor højst med to af de andre. Der findes derfor 6 matematikere, der ikke taler samme sprog som A. Men hver gang A er sammen med to af de seks, skal to tale samme sprog, altså de to andre. Men det giver 15 sprog blandt de 6, og der var kun 13 til rådighed.

Svar – Geometrisk

Lad A og B være to punkter på en cirkel. Lad XY være en diameter, og lad P være skæringspunktet mellem linierne gennem A og X og B og Y hhv.



Bestem det geometriske sted for skæringspunkterne P, når XY gennemløber diametrene.
Da $\angle YAX$ er ret og $\angle AYB$ er konstant, og også $\angle APY$ konstant. P gennemløber derfor en synsvinkelbue, altså er det geometriske sted en vis cirkel, dog på nær punkterne A og B.