Ækvivalente relationer mellem vinkler og sider i en trekant

Mogens Esrom Larsen
Matematisk Institut
Universitetsparken 5
DK–2100 København Ø

David Singmaster
School of Computing, Information Sciences and Mathematics
South Bank University
London SE1 0AA, UK

Det simpleste eksempel på to ækvivalente relationer mellem vinklerne og siderne i en trekant, er sætningen, at en trekant er ligebenet, hvis og kun hvis to af vinklerne er lige store. I trekanten $\triangle ABC$ vil vi her og i det følgende betegne siderne overfor vinklerne med tilsvarende små bogstaver, derved bliver sætningen til formlen

$$\angle A = \angle B \iff a = b. \tag{1}$$

Men det mest berømte eksempel er den Pythagoræiske læresætning, som i denne sammenhæng kan skrives

$$\angle A + \angle B = \angle C \iff a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{(Pythagoras)} \tag{2}$$

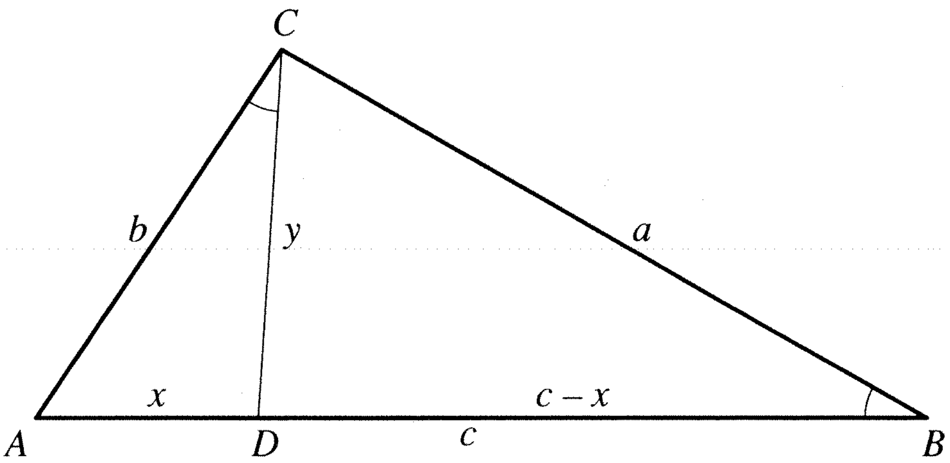
I de sidste halvandet hundrede år er andre par af relationer dukket op. Boner i Münster betragtede mulighederne $\angle C = n\angle B$ i 1845, og denne start inspirerede K. Schwering [**8**, **9**, **10**] og J. Heinrich [**3**] til at studere denne samt $\angle C = \angle A + n\angle B$ i årene fra 1885 til 1913 (se også Dickson [**2**]). For nylig – 1991 – har J. E. Carroll og K. Yanosko [**1**] generaliseret til $n \in \mathbf{Q}$.

De brugte trigonometriske formler og komplekse enhedsrødder, så vi spurgte hinanden om ikke i det mindste tilfældet $n = 2$ kan klares med helt elementære betragtninger. Vi fandt nogle sådanne i litteraturen, W. W. Willson [**13**] i 1976 og R. S. Luthar [**5**] i 1984 betragtede netop relationerne for $n = 2$, og E. A. Maxwell [**6**, **7**] betragtede i 1958 ligningerne $2\angle A = \angle B + \angle C$ og $\angle A = 2(\angle B + \angle C)$.

Vi supplerede i 1991 med ligningen $2(\angle B - \angle A) = \angle C$, [**4**]. Desuden fandt vi helt elementære beviser for samtlige relationer. Relationerne er

$$\angle C = 2\angle B \iff c^2 = b^2 + ab \qquad \text{(Boner)} \tag{3}$$
$$\angle C = 2\angle B + \angle A \iff c^2 = b^2 + ac \qquad \text{(Schwering)} \tag{4}$$
$$\angle C = 2\angle A - \angle B \iff a^2 = b^2 + c^2 - bc \qquad \text{(Maxwell)} \tag{5}$$
$$\angle C = \tfrac{1}{2}\angle A - \angle B \iff a^2 = b^2 + c^2 + bc \qquad \text{(Maxwell)} \tag{6}$$
$$\angle C = 2(\angle B - \angle A) \iff bc^2 = (b-a)(b+a)^2 \qquad \text{(L. \& S.)} \tag{7}$$

Vi vil her præsentere de elementære beviser for formlerne (2–7). Derefter stiller vi spørgsmålet, hvilke heltalsløsninger har de seks Diophantiske ligninger i siderne? Og til sidst spørger vi, om der er nogle af trekanterne, der er Heroniske, det vil sige, tillige har et heltalligt areal.



$\angle ACD = \angle B \iff x/b = b/c \iff xc = b^2$

Figur 1: Pythagoras, Boner og Schwering

Pythagoras, Boner og Schwering

Vi betragter en trekant med $\angle C > \angle B$, se figur 1. Vi tegner en linie fra C til D på c, sådan at $\angle ACD = \angle B$. Derved bliver $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. Når vi betegner $AD = x$ og $CD = y$, bliver $x/b = b/c = y/a$, som vi foretrækker at skrive

(8) $$xc = b^2,$$

(9) $$yc = ab.$$

Ved hjælp heraf kan vi på simpel måde vise (2) og (3).

Bevis for Pythagoras: At $\angle A + \angle B = \angle C$ betyder, at $\angle BCD = \angle A$, og dermed at $\triangle CBD \sim \triangle ABC$. Derfor gælder

$$\angle A + \angle B = \angle C \iff \frac{c-x}{a} = \frac{a}{c},$$

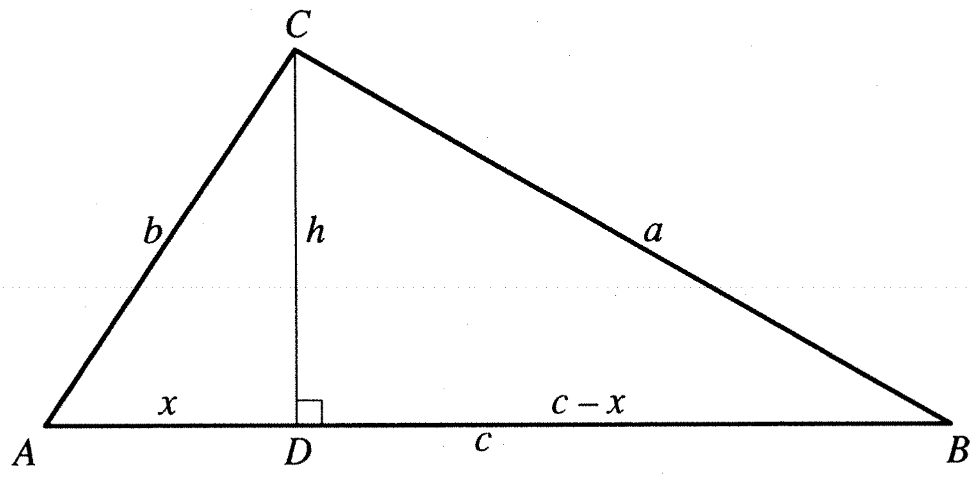
som vi hellere skriver

(10) $$xc = c^2 - a^2.$$

Indsættes (8) i (10), følger (2). ∎

Bevis for Boner: At $\angle C = 2\angle B$ betyder, at $\angle BCD = \angle B$ og derfor, at $\triangle BDC$ er ligebenet, med $y = c - x$. Altså med brug af (8) og (9), hvis og kun hvis $c^2 = xc + yc = b^2 + ab$, hvoraf (3) følger. ∎

Bevis for Schwering: At $\angle C = 2\angle B + \angle A$ betyder, fordi vi har $\angle BCD = \angle C - \angle B$ og $\angle BDC = \angle A + \angle B$, at $\triangle CBD$ er ligebenet med $a = c - x$. Altså ved hjælp af (8), hvis og kun hvis $c^2 = xc + ac = b^2 + ac$, hvoraf (4) følger. ∎



Figur 2: Højdens deling af grundlinien

Heron og Maxwell

Vi betragter igen en trekant med $\angle C$ størst, se figur 2. Vi tegner højden fra C til D på c, og kalder $AD = x$, så vi får $BD = c - x$. Vi bruger Pythagoras på de to retvinklede trekanter, $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$. Vi får

$$h^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

hvoraf vi finder

$$2xc = c^2 + b^2 - a^2. \tag{11}$$

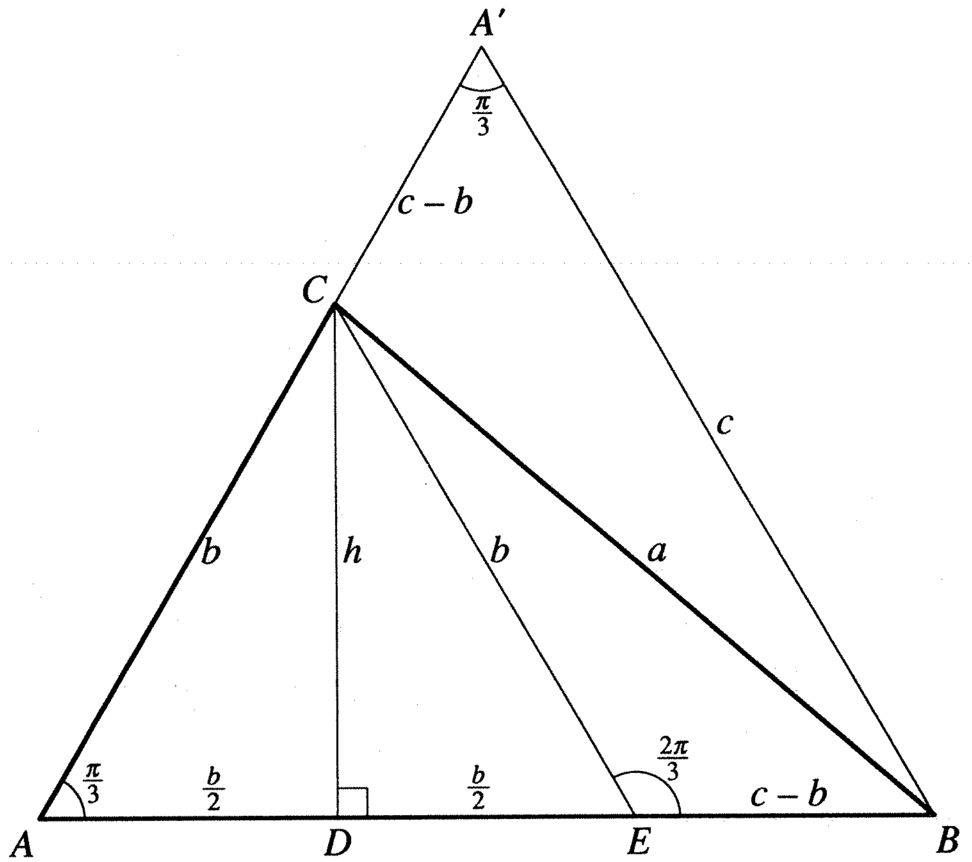
Disse to formler giver let Herons formel. Trekantens areal er jo $\frac{1}{2}hc$, så kvadratet på arealet er

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}h^2c^2 &= \tfrac{1}{4}(b^2 - x^2)c^2 \\ &= \tfrac{1}{16}(2bc + 2xc)(2bc - 2xc) \\ &= \tfrac{1}{16}(2bc + c^2 + b^2 - a^2)(2bc - c^2 - b^2 + a^2) \\ &= \tfrac{1}{16}((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (c - b)^2) \\ &= \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}.\end{aligned} \tag{12}$$

Slutresultatet er symmetrisk i a, b og c, så forudsætningen, at $\angle C$ var størst, er uden betydning for resultatet. Dette får vi brug for senere, når vi skal finde de eventuelle Heroniske trekanter.

Bevis for Maxwell: At $2\angle A = \angle B + \angle C$, er ensbetydende med, at $\angle A = \pi/3$, og det er igen ensbetydende med, at $b = 2x$. Indsættes dette i (11), fås (5). ■

Det ses på figur 3, at foruden de ligesidede trekanter kommer der et par af trekanter med den ene vinkel $\pi/3$, nemlig trekanterne $\triangle ABC$ og $\triangle A'BC$. Ligningen $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ kan omskrives til formen $a^2 = c^2 + (c - b)^2 - c(c - b)$, som er den tilsvarende ligning for $\triangle A'BC$. Men den er også ensbetydende med den analoge ligning for $\triangle BCE$, $a^2 = b^2 + (c - b)^2 + b(c - b)$. Den har jo siderne a, b og $c - b$, samt $\angle BEC = 2\pi/3$, som er analogt med vinkelrelationen i (6). Dermed er (6) også vist.



$\angle A = \angle A' = \pi/3$ og $\angle CEB = 2\pi/3$

Figur 3: Archimediske trekanter

Den ene vinkel dobbelt så stor som forskellen mellem de to andre

Formlen (7) blev fundet 1990 af os, men det elegante bevis, vi præsenterer her, skylder vi Andy Liu, der fandt på det i 1991. Han kombinerer de to ideer, vi lige har benyttet i det foregående.

Liu's bevis: Denne gang tegner vi i figur 4 både vinkelhalveringslinien fra C til D og højden fra C til E på c. Vi skriver nemlig formlen (7) på formen $\angle B = \angle A + \frac{1}{2}\angle C$, fordi den sidste sum findes på figuren som supplementvinkel til $\angle CDA$ i $\triangle CDA$. Altså er $\angle CDB = \angle A + \frac{1}{2}\angle C$, så vinkelrelationen bliver ensbetydende med, at $\triangle BCD$ er ligebenet, altså, at $a = d$ eller at $x = y$.

En simpel egenskab ved vinkelhalveringslinien er, at

$$\frac{c-x-y}{b} = \frac{x+y}{a} = \frac{c}{a+b},$$

hvoraf vi får

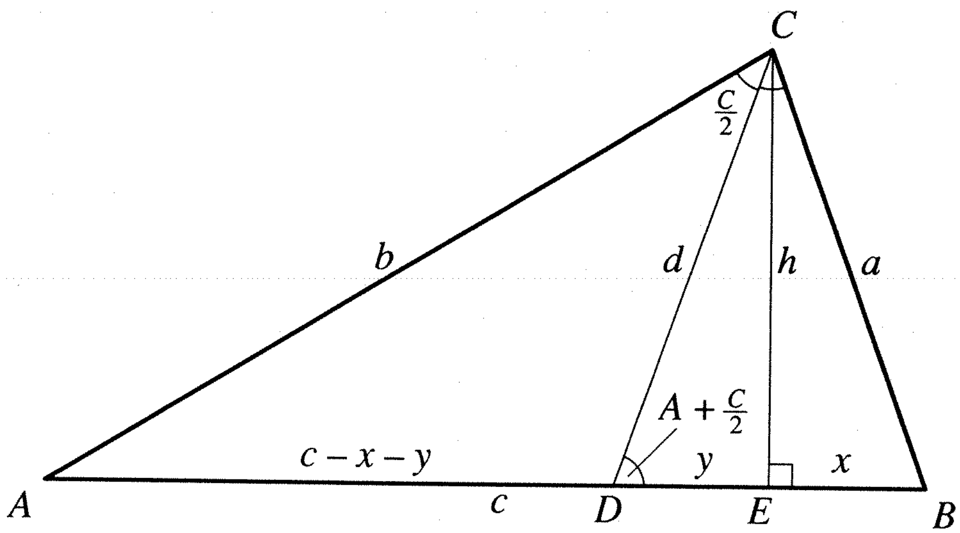
$$c - x - y = \frac{bc}{a+b}.$$

Fra (11) med a og b byttet om har vi

$$2x = c + \frac{a^2-b^2}{c},$$

som vi foretrækker at skrive

$$c - 2x = \frac{b^2-a^2}{c}.$$



$$\angle C = 2(\angle B - \angle A) \iff d = a \iff x = y$$

Figur 4: Vinkelhalveringslinie plus højde

Heraf følger umiddelbart, at betingelsen $x = y$ er ensbetydende med, at

$$\frac{bc}{a+b} = \frac{b^2 - a^2}{c},$$

som vi foretrækker at skrive

$$bc^2 = (b-a)(b+a)^2.$$

■

Diophantiske trekanter

En trekant med siderne i et rationalt forhold kaldes Diophantisk, hvis den har en eller anden yderligere egenskab. Formlerne fra (2) til (7) giver os mulighed for at finde stribevis af Diophantiske trekanter ved simpelthen at løse ligningerne i siderne som Diophantiske ligninger.

Det er forbløffende let at gætte små løsninger til ligningerne, man får uden videre

$(a, b, c) = (3, 2, 4)$ er en løsning til (4)
$(a, b, c) = (3, 4, 5)$ er en løsning til (2)
$(a, b, c) = (5, 4, 6)$ er en løsning til (3)
$(a, b, c) = (6, 8, 7)$ er en løsning til (7)
$(a, b, c) = (7, 3, 5)$ er en løsning til (6)
$(a, b, c) = (7, 3, 8)$ er en løsning til (5)
$(a, b, c) = (7, 5, 8)$ er en løsning til (5)

Det er dog ikke alle talsæt, der uden videre giver en Diophantisk trekant. Vi ved i det mindste ikke, hvilken egenskab en trekant med siderne (5,6,7) har.

Diophant, Euklid, Boner og Schwering

De primitive, det vil sige uforkortelige, Pythagoræiske talsæt blev fundet af Euklid på formen

(13) $$(a, b, c) = (p^2 - q^2,\ 2pq,\ p^2 + q^2),$$

hvor $q < p$ er primiske af modsat paritet. Samtlige fås ved at forlænge (13).

Tilsvarende kan vi finde løsningerne til de andre ligninger.

Sætning 1. De primitive løsninger til $c^2 = b^2 + ab$ er

$$(a, b, c) = (p^2 - q^2, q^2, pq), \tag{14}$$

hvor $q < p < 2q$ er primiske.

Bevis: Vi skriver (3) som

$$c^2 = b(a + b).$$

Når (a, b, c) er uforkortelig, så må der findes primiske tal, p og q, så $b = q^2$ og $a + b = p^2$. Trekantsuligheden $a < b + c$ giver $p^2 - q^2 < q^2 + pq$, eller bedre

$$(p + q)(p - 2q) < 0,$$

hvoraf $-q < p < 2q$. Da $a > 0 \Leftrightarrow p > q$ fås betingelsen. ∎

Sætning 2. De primitive løsninger til $c^2 = b^2 + ac$ er

$$(a, b, c) = (p^2 - q^2, pq, p^2), \tag{15}$$

hvor $q < p$ er primiske.

Bevis: Vi skriver (4) som

$$b^2 = c(c - a).$$

Når (a, b, c) er uforkortelig, så må der findes primiske tal, p og q, så $c = p^2$ og $c - a = q^2$, hvor $q < p$, da $a > 0$. ∎

Archimediske trekanter

Diophantiske trekanter med den ene vinkel lig med $\pi/3$ kaldes Archimediske. Vi behandler dem sammen med dem, der har den ene vinkel lig med $2\pi/3$, fordi de kommer i tripler, to af den første slags og én af den sidste.

Hvis (a, b, c) er en løsning til $c^2 = b^2 + a^2 + ab$, så er $(a', b', c') = (a + b, b, c)$ og $(a', b', c') = (a, a + b, c)$ løsninger til $c'^2 = b'^2 + a'^2 - a'b'$.

Sætning 3. De primitive løsninger til $c^2 = b^2 + a^2 + ab$ er

$$(a, b, c) = \left(pq, \frac{(3p + q)(p - q)}{4}, \frac{3p^2 + q^2}{4}\right) \quad \text{for } q < p, \tag{16}$$

$$(a, b, c) = \left(pq, \frac{(q - 3p)(q + p)}{4}, \frac{3p^2 + q^2}{4}\right) \quad \text{for } 3p < q, \tag{17}$$

hvor q og p er ulige primiske tal, og q ikke er deleligt med 3.

Bevis: På grund af symmetrien kan a og b eventuelt byttes om. Hvis sættet (a, b, c) er uforkorteligt, så må mindst én af a og b være ulige. Hvis a er ulige, skriver vi $c^2 = b^2 + a^2 + ab$ på formen

$$3a^2 = (2c + 2b + a)(2c - 2b - a).$$

Faktorerne er ulige og primiske, så vi finder p og q, så faktorerne er $3p^2$ og q^2 og så $3p$ og q er primiske. Heraf fås

$$\begin{aligned} 4c &= 3p^2 + q^2 \\ a &= pq \\ 4b + 2a &= |3p^2 - q^2| \\ 4b &= |3p^2 - q^2| - 2pq \end{aligned}$$

Hvis $q < p$, får vi $4b = (3p+q)(p-q)$ og hvis $3p < q$, får vi $4b = (q-3p)(q+p)$. ∎

Bemærk først, at vi får

$$a + b = \begin{cases} \frac{1}{4}(3p-q)(p+q) & \text{for } q < p, \\ \frac{1}{4}(q+3p)(q-p) & \text{for } 3p < q. \end{cases} \tag{18}$$

Bemærk dernæst, at for $p < q < 3p$ bliver $b < 0$. Der er iøvrigt en vis redundans i fremstillingen. Hvis a og b begge er ulige, kunne de ombyttes. Det svarer til, at vi kunne erstatte p og q med $\frac{1}{2}(p-q)$ og $\frac{1}{2}(3p+q)$ for $q < p$, og med $\frac{1}{2}(q+p)$ og $\frac{1}{2}(q-3p)$ for $3p < q$.

Trediegradsligningen

Sætning 4. De primitive løsninger til

$$bc^2 = (b-a)(b+a)^2 \tag{19}$$

er givet på formen

$$(a, b, c) = (p(p+q)(p-q),\ p^3,\ q(2p^2 - q^2)), \tag{20}$$

hvor $q < p$ er primiske.

Bevis: Selv om (a, b, c) er et uforkorteligt sæt, er a og b ikke nødvendigvis primiske. Lad nu π være et primtal, der går op i b, lad π^n være den højeste potens af π, der går op i b, og lad π^m være den højeste potens af π, der går op i a. Vi har altså

$$b = \pi^n d,$$

hvor π ikke går op i d, og

$$a = \pi^m f,$$

hvor π ikke går op i f. Indsættes dette i (19) fås

$$\pi^n dc^2 = (\pi^n d - \pi^m f)(\pi^n d + \pi^m f)^2,$$

hvoraf ses, at $m \geq n$ ikke kan forekomme. Derfor kan vi skrive

$$\pi^n dc^2 = \pi^{3m}(\pi^{n-m} d - f)(\pi^{n-m} d + f)^2.$$

Heraf følger, at $n = 3m$. Altså er b en trediepotens,

$$b = p^3,$$

hvor p går op i a. Derfor er $a = pg$, hvor p og g er primiske. Indsættes i (19) fås

$$p^3c^2 = p^3(p^2 - g)(p^2 + g)^2.$$

Sættes $h = p^2 - g$, bliver p og h primiske, og vi får

$$c^2 = h(p^2 + g)^2 = h(2p^2 - h)^2,$$

hvoraf fås, at h bliver et kvadrat, det vil sige $h = q^2$, hvor q bliver primisk med p. Altså er

$$\begin{aligned} a &= pg = p(p^2 - h) = p(p^2 - q^2) = p(p + q)(p - q), \\ c &= q(2p^2 - q^2). \end{aligned}$$

■

Eksempler

Vi kan nu let give eksempler på de forskellige typer. Vi giver en tabel for $q < p \leq 8$, så de første tre tal giver siderne i en trekant af type (3), fra 2 til 4 fås en trekant af type (4) og fra de sidste tre en af type (7).

q	p	q^2	$p^2 - q^2$	pq	p^2	$p^3 - pq^2$	p^3	$2qp^2 - q^3$
1	2	*1	3	2	4	6	8	7
1	3	*1	8	3	9	24	27	17
2	3	4	5	6	9	15	27	28
1	4	*1	15	4	16	60	64	31
3	4	9	7	12	16	28	64	69
1	5	*1	24	5	25	120	125	49
2	5	*4	21	10	25	105	125	92
3	5	9	16	15	25	80	125	123
4	5	16	9	20	25	45	125	136
1	6	*1	35	6	36	210	216	71
5	6	25	11	30	36	66	216	235
1	7	*1	48	7	49	336	343	97
2	7	*4	45	14	49	315	343	188
3	7	*9	40	21	49	280	343	267
4	7	16	33	28	49	231	343	328
5	7	25	24	35	49	168	343	365
6	7	36	13	42	49	91	343	372
1	8	*1	63	8	64	504	512	127
3	8	*9	55	24	64	440	512	357
5	8	25	39	40	64	312	512	515
7	8	49	15	56	64	120	512	553

* betyder, at en type (3) trekant ikke findes, på grund af $p \geq 2q$.

I tilfældet (4) får vi tilsvarende

$$
(28) \qquad
\begin{aligned}
s &= \tfrac{1}{2}(p^2 - q^2 + pq + p^2) = \tfrac{1}{2}(p+q)(2p-q),\\
s-a &= p^2 + \tfrac{1}{2}(pq - q^2) - p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}q(p+q),\\
s-b &= p^2 + \tfrac{1}{2}(pq - q^2) - pq = \tfrac{1}{2}(p-q)(2p+q),\\
s-c &= p^2 + \tfrac{1}{2}(pq - q^2) - p^2 = \tfrac{1}{2}q(p-q).
\end{aligned}
$$

Vi får derfor for arealet

$$
(29) \qquad \Delta^2 = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 q^2(p^2-q^2)^2(2p-q)(2p+q).
$$

Vi ser, at med (25–27) kan vi igen løse problemet, vi skal blot ombytte p og q. Denne gang skal $p > q$ eller $p > r$. Det betyder i første tilfælde, at $4uv < u^2 + v^2$, hvilket er opfyldt for $u/v > 2 + \sqrt{3}$, og i andet tilfælde, at $2(u^2 - v^2) < u^2 + v^2$, hvilket er opfyldt for $u/v < \sqrt{3}$. Disse betingelser er aldrig opfyldt samtidig, så vi kan vælge at lade q være den af $4uv$ og $2(u^2 - v^2)$, som er mindre end $p = u^2 + v^2$.

u	v	p	q	r	$a = p^2 - q^2$	$b = pq$	$c = p^2$	$\Delta = \frac{1}{4}qar$
4	1	17	16	30	33	272	289	3960
6	1	37	24	70	793	888	1369	333060
3	2	13	10	24	69	130	169	4140
4	3	25	14	48	429	350	625	72072
5	4	41	18	80	1357	738	1681	488520
6	5	61	22	120	3237	1342	3721	2136420
7	6	85	26	168	6549	2210	7225	7151508

I tilfældet (7) får vi endelig

$$
(30) \qquad
\begin{aligned}
s &= \tfrac{1}{2}(p^3 - pq^2 + p^3 + 2qp^2 - q^3) = \tfrac{1}{2}(p+q)(2p^2 - q^2),\\
s-a &= qp^2 + p^3 - \tfrac{1}{2}q^3 - \tfrac{1}{2}pq^2 - p^3 + pq^2 = \tfrac{1}{2}q(p+q)(2p-q),\\
s-b &= qp^2 + p^3 - \tfrac{1}{2}q^3 - \tfrac{1}{2}pq^2 - p^3 = \tfrac{1}{2}q(p-q)(2p+q),\\
s-c &= qp^2 + p^3 - \tfrac{1}{2}q^3 - \tfrac{1}{2}pq^2 - 2qp^2 + q^3 = \tfrac{1}{2}(p-q)(2p^2 - q^2).
\end{aligned}
$$

Vi finder derfor

$$
(31) \qquad \Delta^2 = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 q^2(p^2-q^2)^2(2p^2-q^2)^2(2p+q)(2p-q).
$$

Nøjagtig samme restriktioner som i tilfældet (4). Vi får den analoge tabel:

u	v	p	q	r	$a = p(p^2 - q^2)$	$b = p^3$	$c = q(2p^2 - q^2)$	$\Delta = acr/4p$
4	1	17	16	30	561	4913	5152	1275120
6	1	37	24	70	29341	50653	51888	720075720
3	2	13	10	24	897	2197	2380	985320
4	3	25	14	48	10725	15625	14756	75963888
5	4	41	18	80	55637	68921	54684	1484123760
6	5	61	22	120	197457	226981	153076	14865210360
7	6	85	26	168	556665	614125	358124	98504871192

De Heroniske trekanter føres alle tilbage til udgangspunktet, den fuldstændige løsning til Pythagoras.

Referencer

[1] Joseph E. Carroll and Ken Yanosko. *The Determination of a Class of Primitive Integral Triangles.* Fibonacci Quarterly **29** (1991) 3–6.

[2] L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers, Volume II, Diophantine Analysis. Rational or Heron triangles and Triangles with Rational Sides and a Linear Relation between the Angles.* G.E. Stechert & Co., New York, 1934, 191–201, 213–214.

[3] J. Heinrichs. *Aufgabe: Dreiecke mit ganzzahligen Seiten anzugeben so daß $\alpha = n\beta+\gamma$ wird.* Zeitschr. math. u. naturwiß. Unterricht **42** (1911) 148–153.

[4] Mogens Esrom Larsen and David Singmaster. *Triangles with equivalent relations between the angles and between the sides.* Missouri Journal of Mathematical Sciences **3** (1991) 111–129.

[5] R. S. Luthar. *Integer–Sided Triangles with One Angle Twice Another.* College Math. J. **15** (1984) 55–56.

[6] E. A. Maxwell. *Triangles whose angles are in arithmetic progression.* Math. Gazette **42** (1958) 113.

[7] E. A. Maxwell. *Triangles whose sides are in geometric progression.* Math. Gazette **42** (1958) 114.

[8] Karl Schwering. *Über Dreiecke, in denen e i n Winkel das Vielfache eines a n d e r n ist.* Jahresbericht über das Königliche Gymnasium Nepomucenianum zu Coesfeld im Schuljahre 1885–86 **85** (1886) 3–7.

[9] Karl Schwering. *100 Aufgaben aus der niederen Geometrie nebst vollständigen Lösungen, Aufgabe 56: Von einem Dreieck ist gegeben: die Grundlinie BC, der zugehörige Höhenfußpunkt D und die Bestimmung $\alpha = 2\beta$.* Herdersche Verlagshandlung, Freiburg im Breisgau, 1891, 88–89.

[10] Karl Schwering. *Ganzzahlige Dreiecke mit Winkelbeziehungen.* Archiv der Mathematik und Physik (3) **21** (1913) 129–136.

[11] T. Sole. *The Ticket to Heaven and Other Superior Puzzles.* Penguin, London, 1988, 70, 79.

[12] Geoffrey Wain and William Wynne Willson. *13, 14, 15: an investigation.* Math. Gazette **71**, No. 455 (1987) 32–37.

[13] William Wynne Willson. *A generalisation of a property of the 4, 5, 6 triangle.* Math. Gazette **60**, No. 412 (1976) 130–131.