Den korteste vej mellem to punkter på et landkort

AF MOGENS ESROM LARSEN

Et landkort er et plant billede af en krum flade, f.eks. jordoverfladen. Man kan derfor ikke regne med, at den korteste vej i virkeligheden f.eks. på jorden også svarer til den i planen korteste vej, det vil sige den rette linie. Alligevel kan vi lave et kort over hele jordens overflade, sådan at den korteste vej kan konstrueres.

Et landkort er et plant billede af en del af jordens overflade; idealiseret en kugleflade. Hvert punkt på kuglefladen – eller en del heraf – har sit eget billede. Ethvert sted på kortet svarer til et sted på kuglefladen og omvendt. Alle interessante steder kan derfor markeres på kortet; byer, huse, landegrænser, havgrænser osv. Et kort skal kunne bruges til bestemmelse af interessante egenskaber ved kuglefladen. Afstande skal kunne beregnes, kompasretninger (også kaldet »loxodromer« af græsk λοξος »skrå« og δρομος »løbebane«) skal kunne bestemmes, arealer skal kunne sammenlignes, – og man skal kunne bestemme den korteste vej mellem to punkter (også kaldet »geodæten« af græsk γη »jorden« og δαιζω »deler«.).

Det er svært at lave et kort, hvorpå samtlige af disse opgaver er lette at løse. Derfor har man fundet på mange forskellige typer af kort, hver med sit særlige fortrin. Analogt til fremvisningen af lysbilleder på en plan væg kalder vi et kort for en *projektion* af kuglefladen, også selv om kortet ikke fremkommer ved en projektion med rette linier fra et enkelt punkt.

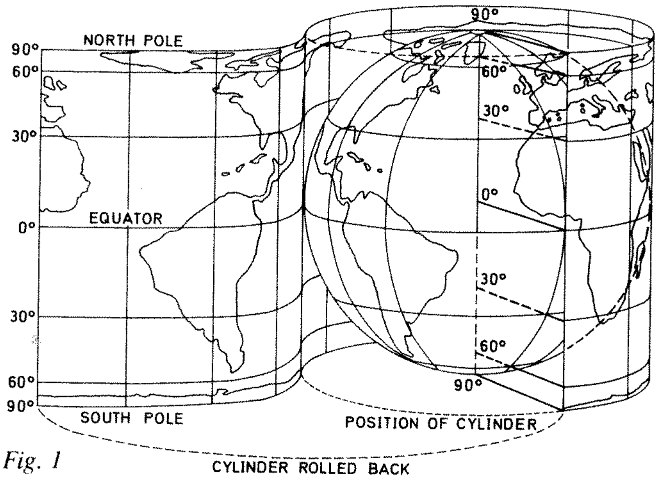

Fig. 1

Figur 1 viser et eksempel på en projektion, den cylindriske projektion. Den er arealtro, hvilket allerede Archimedes (ca. 287-212 f.v.t.) vidste. Til gengæld bliver landene stærkt fortegnede i nærheden af polerne, og såvel loxodromer som geodæter er vanskelige at bestemme.

Man kan korrigere cylinderen ved at gøre den længere, som om den var af gummi. Men det er ikke muligt at vælge en gummicylinder sådan, at alle geodæterne bliver rette linier. På kuglefladen er geodæterne netop storcirklerne, dvs. de cirkler, der ligesom ækvator og meridianerne har samme centrum og radius som kuglen. Hvis vi derfor betragter en anden storcirkel end de nævnte, vil den skære ækvator to gange. Hvis derfor dens billede på cylinderen skal være en ret linie, må den falde sammen med ækvator.

Derimod kan man korrigere den, så længdeforholdet mellem længderetning og bredderetning bliver ensartet, hvorved man opnår, at loxodromerne bliver rette linier på kortet. Det er netop den berømte Mercators projektion fra 1569 (fundet af Gerhard Kremer (1512-84)). Se figur 2.

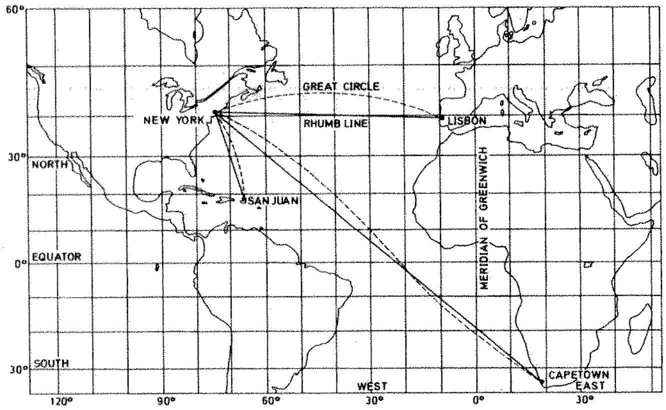

Fig. 2

Men heller ikke på den er geodæterne lette at bestemme, (»storcirkel« på figur 2).

Problemet er, hvad der sker med storcirklerne ved projektionen. Et særligt simpelt billede af storcirklerne fås ved en projektion fra kuglens centrum af en halvkugle på en tangentplan. Se figur 3.

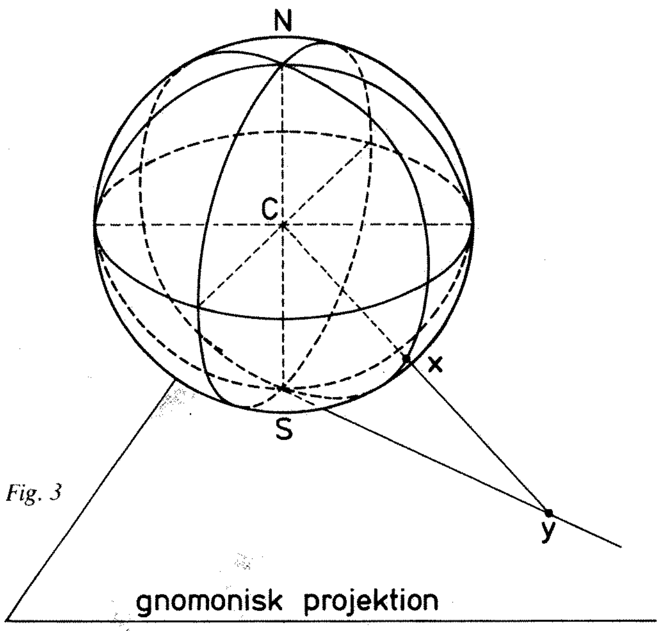

Fig. 3

Denne projektion kaldes den »gnomoniske« (af græsk γνομων »solursviser«). På denne projektion er geodæterne rette linier. Thi punkterne på én storcirkel projiceres af linier, der ligger i én og samme plan. De afbildes derfor i skæringskurven mellem denne plan og tangentplanen; men denne skæringskurve er en ret linie. Se figur 4.

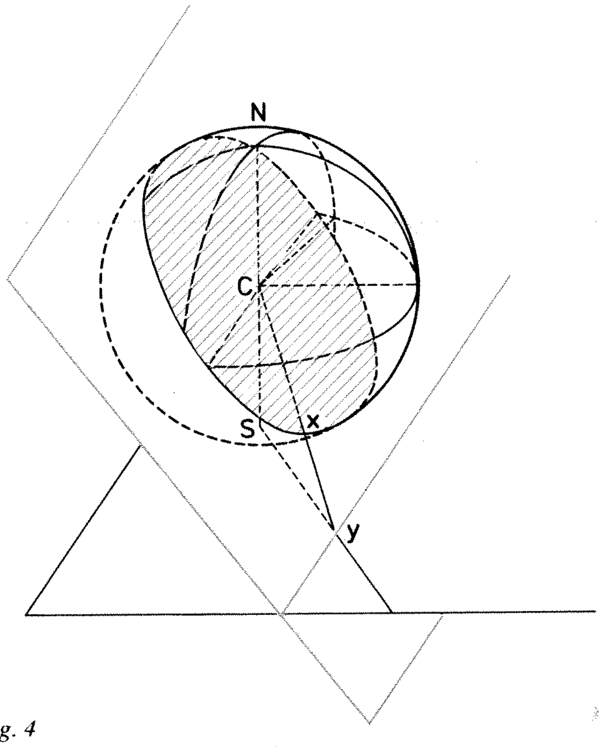

Fig. 4

Et kort og klart ræsonnement man kan glæde sig over.

Nok så elegant og mere interessant er den analoge projektion fra kuglens nordpol af hele kuglen på tangentplanen i sydpolen. Se figur 5.

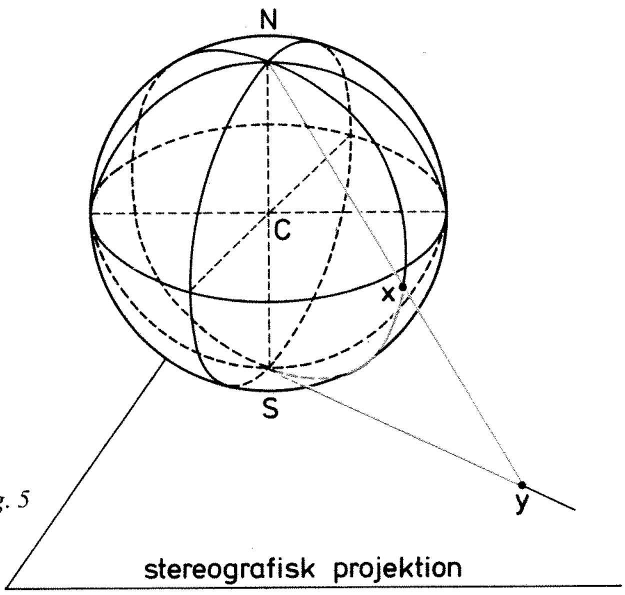

Fig. 5

Den kaldes den »stereografiske« projektion (af græsk στερεος »rumlig« og γραφη »tegning«) og har været kendt af Ptolemaios (2. årh. e.v.t.) og ifølge

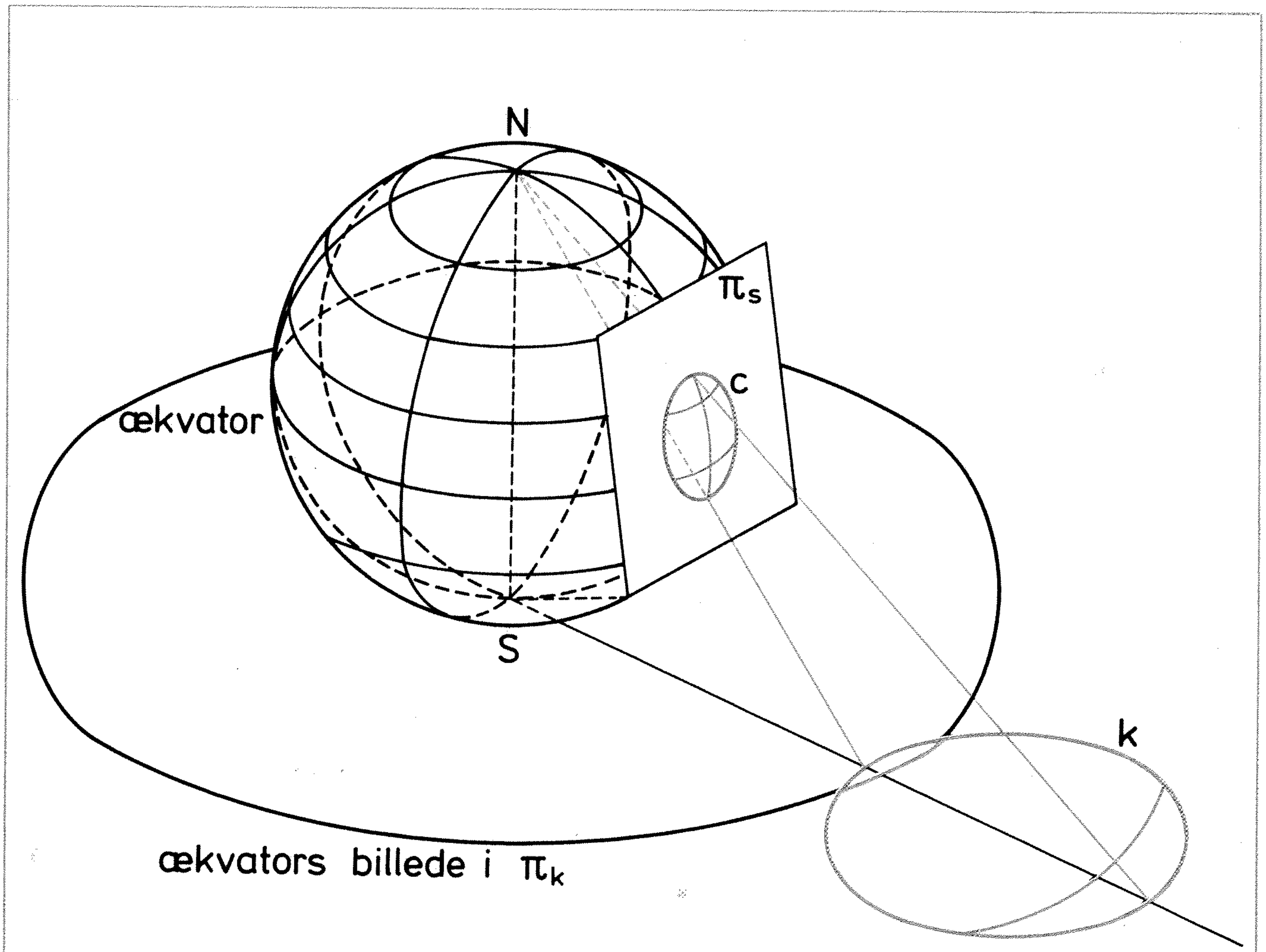

Fig. 6

denne af Hipparch (2. årh. f.v.t.). På denne projektion er geodæterne (bortset fra meridianerne) cirkler, som vist i boksen.

Bemærk, at vi lige fra begyndelsen af overvejelserne ser et eksempel på matematisk tankegang, nemlig generalisationen af selve problemet.

Vi betragter ikke billederne af storcirklerne alene, men undersøger billederne af *alle* cirkler på kuglen.

Vi ser straks – på samme måde som ovenfor ved den gnomoniske projektion, – at de cirkler, der går gennem nordpolen, projiceres i rette linier, – og at ingen andre har denne egenskab. Vi skal se nedenfor, at alle andre – og ikke kun breddecirklerne – projiceres i cirkler. Se figur 6.

Tænker vi på N som en lyskilde og på c som et cirkelrundt vindue i bolden, vil k fremstå som lysbillede af c ved lyskeglen fra N. Vi siger, at bundtet af linier gennem N (»toppunktet«) og et vilkårligt punkt på c (»frembringerkurven«) frembringer en (i almindelighed skæv) kegle. Hvis cirkelplanen er parallel med tangentplanen, er keglen ret. Det er f.eks. tilfældet for den kegle, som frembringes af ækvator. Da ækvators plan er parallel med kortets plan, π_k, er ækvators billede i π_k en cirkel, hvis radius må være lig med kuglens diameter.

Planer, der er parallelle med frembringercirklens plan, skærer også den skæve kegle i cirkler. Hvad der imidlertid ikke er så indlysende, er, at der også findes en anden familie af parallelle planer, der alle skærer den skæve kegle i cirkler. Den blev fundet af den græske matematiker Apollonios (3. årh. f.v.t.).

Box

Lad os se på en skæv kegle frembragt af en cirkel, figur 7. Vi vil nu overbevise os om, at der findes en plan, der ikke er parallel med frembringercirklens plan, men som alligevel skærer keglen i en cirkel.

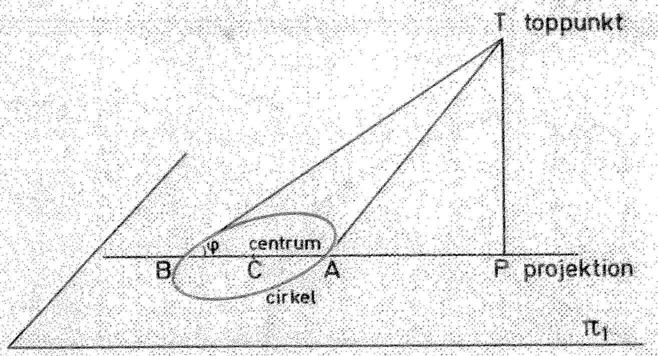

Fig. 7

Keglens toppunkt, T, har en ortogonal projektion, P, på planen π_1, dvs. at TP står vinkelret på planen. Linien gennem P og cirklens centrum, C, skærer cirklen i to punkter, A og B, så A er nærmest P og B er fjernest P. Linierne TA og TB er to særlig interessante frembringere for keglen, idet liniestykkerne TA og TB er henholdsvis korteste og længste stykke fra T til et punkt på cirklen.

Vi skærer nu keglen med en anden plan, π_2, så π_2 er vinkelret på planen udspændt af T, P og C, og så planen π_2 danner vinkelen φ (= TBP) med linien TA. Figur 8 viser planen TPC, som den skæres af planerne π_1 og π_2.

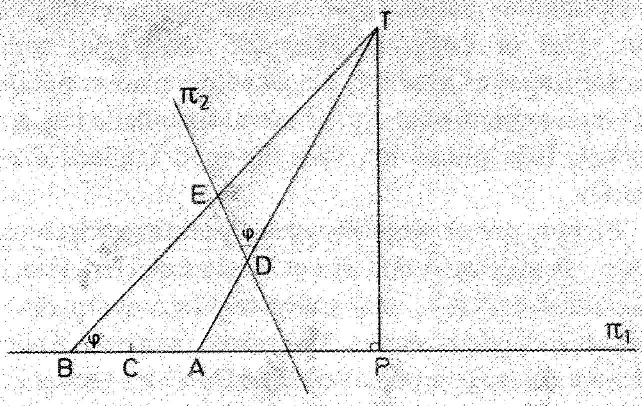

Fig. 8

Planen π_2 skærer keglen i en kurve, k, som ses i figur 9. Vi skal vise, at denne kurve er en cirkel.

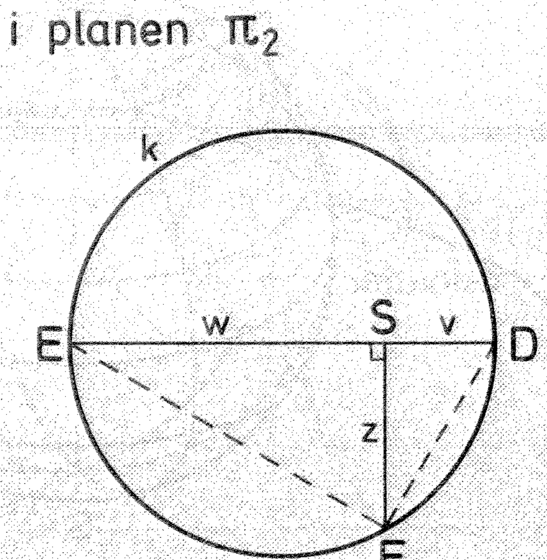

Fig. 9

Betragt et vilkårligt punkt, F, på denne skæringskurve, og punktets projektion på linien ED, kaldet S på figur 9.

Da linien FS er valgt, så den står vinkelret på planen TPC, er den parallel med planen π_1. Vi kan derfor lægge en plan, π_3, som indeholder FS og er parallel med π_1. Planen π_3 skærer derfor keglen i en cirkel. Se figur 10.

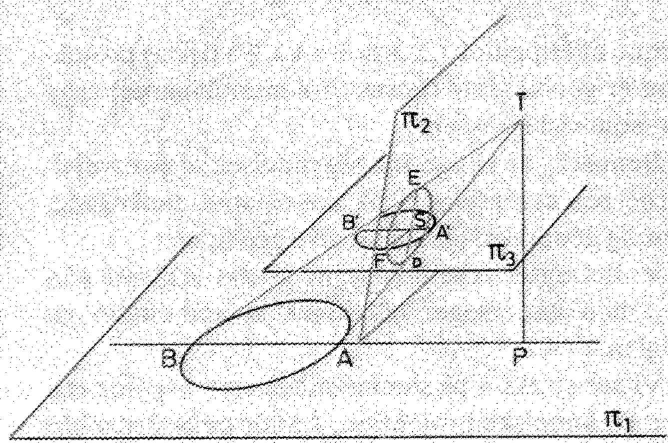

Fig. 10

Og da S ligger i planen TPC, der er keglens symmetriplan, ligger S på en diameter A'B', der står vinkelret på FS. Se figur 11.

i planen π_3

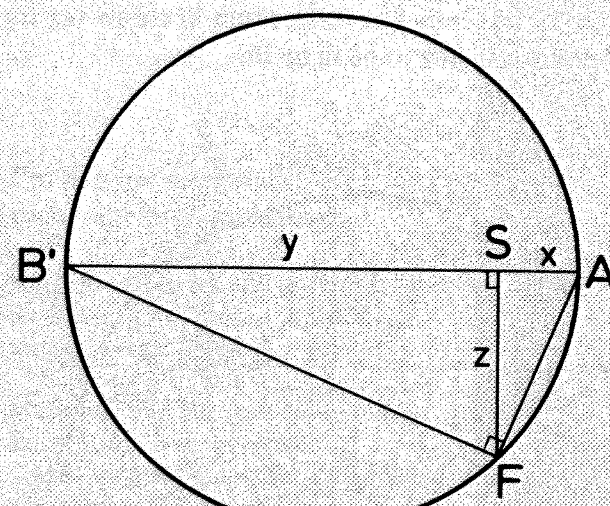

Fig. 11

Da < A'FB' er ret (se den anden box), er trekanterne △ A'SF og △ FSB' ensvinklede. Derfor er $\frac{x}{z} = \frac{z}{y}$ eller $z^2 = xy$.

Vi betragter nu skæringslinien mellem planen π_3 og planen T P C i figur 10, se figur 12.

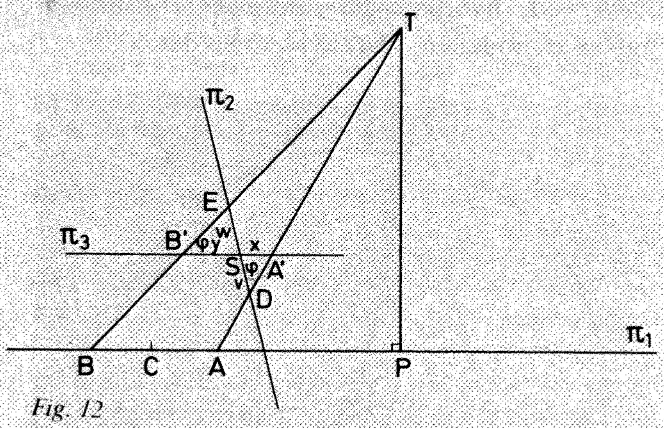

Fig. 12

På figur 12 er trekanterne △ A'DS og △ EB'S ensvinklede, fordi <B' = <D = φ (således havde vi konstrueret DE) og <ESB' = <A'SD (topvinkler er lige store på grund af symmetrien), så $\frac{x}{v} = \frac{w}{y}$ eller yx = wv. Da vi tidligere har vist, at xy = z^2, slutter vi, at z^2 = wv eller $\frac{v}{z} = \frac{z}{w}$. Men så er △ DSF og △ FSE i figur 9 ensvinklede, fordi <S er ret i dem begge, hvorfor <DFE er ret. Heraf følger, at F må ligge på cirklen, der har DE som diameter. Da F var et vilkårligt punkt, må k være denne cirkel.

Vi vender nu tilbage til det egentlige problem, at vise at en cirkel på kuglen projiceres i en cirkel på planen. Det vil være tilfældet, hvis de to planer π_k og π_s skærer de relevante frembringere i keglen med samme vinkel. Vi betragter derfor et tværsnit af figur 6 på planen gennem N, S og cirklens centrum, se figur 13.

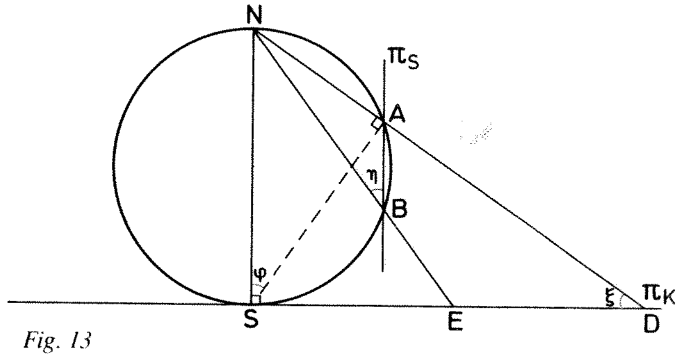

Fig. 13

Vi skal blot vise, at vinklerne ξ og η er ens. Men vinklen ξ er lig med vinklen φ, fordi △ DSN og △ SAN er ensvinklede. Og vinklen η er lig med vinklen φ, fordi de to er periferivinkler, der spænder over den samme bue. (Se den anden box).

Vi har således fundet, at enhver cirkel på kuglen projiceres i en cirkel eller en ret linie, det sidste netop når cirklen går gennem nordpolen. Specielt kan vi sige det samme om geodæterne.

Tilbage står problemet at bestemme den korteste vej mellem to punkter på kuglen ved hjælp af kortet; – vi ved nu, at den må være en cirkelbue, (med mindre de to punkter ligger på en meridian, i hvilket tilfælde buen udarter til en ret linie). Vi kan derfor løse problemet, blot vi kan finde endnu et punkt på den søgte cirkel.

Er der givet et punkt på kuglen, så vil enhver storcirkel gennem det også gå gennem det diametralt modsatte punkt på kuglen. Kan vi derfor finde billedet af det modsatte punkt, når vi kender billedet af punktet selv, er opgaven løst.

Vi betragter derfor et punkt, A, på kuglen, det diametralt modsatte punkt, B, og de to punkters billeder i planen π_k, henholdsvis D og E. Disse punkter ligger i en plan, der også indeholder punkterne N og S, se figur 14.

Da <ANB spænder over diameteren AB, er denne vinkel ret. Men så er det let at finde E, når D er givet, idet en kopi af △ DNE kan tegnes på kortet π_k.

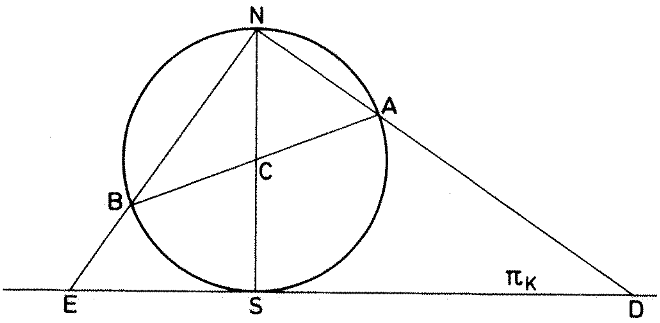

Fig. 14

Vi gør som vist på figur 15 for at finde geodæten fra D til F.

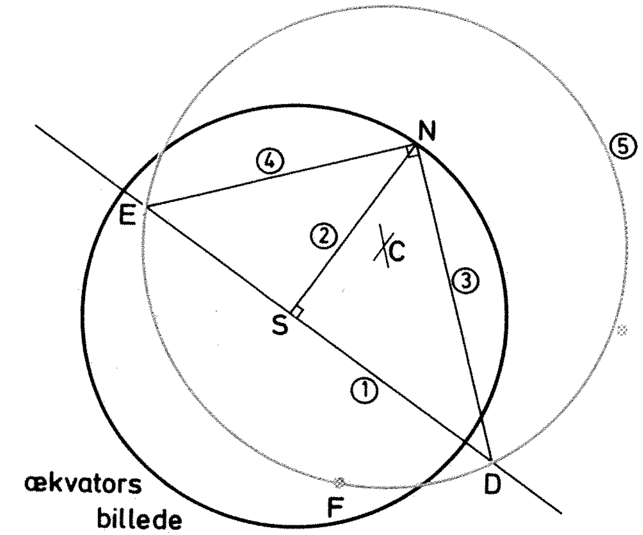

Fig. 15

Vi oprejser den vinkelrette til DS i S, skærer den med ækvator i N, oprejser den vinkelrette til DN i N og skærer denne med DS i E. Cirklen tegnes gennem D, E og F (med centrum i C).

Som et eksempel er anført den korteste vej fra København til Tokyo på figur 16.

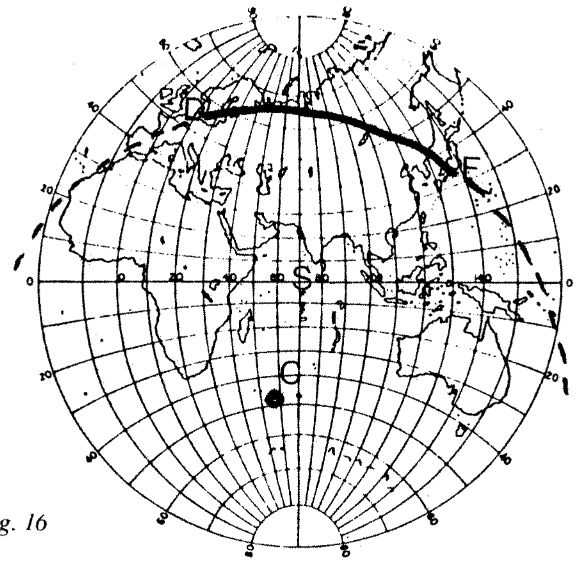

Fig. 16

Moralen af denne historie er, at det ikke gør noget, at en matematisk model ser anderledes ud end den virkelighed, modellen skal forestille. Når blot vi ved, hvordan det interessante fænomen gengives af modellen, klarer vi os med det.

Box om plan geometri

Yngre læsere, som ikke er fortrolige med planens geometri, forstår nok sådanne intuitivt indlysende kendsgerninger, som at parallelle planer skærer en given kegle i ligedannede kurver, f.eks. cirkler, men har måske sværere ved at acceptere beregningerne af periferivinkler i en cirkel. (En periferivinkel er en vinkel, hvis toppunkt ligger på cirklens periferi, dvs. omkreds.)

I figur 17 er vinklen <ACB halvt så stor som vinklen <AOB (Euklids elementer, III bog, sætning 20).

Det følger af, at dels er x = y, fordi △ BOC er ligebenet (BO = CO = radius), dels er z = x + y, fordi vinkelsummen i en trekant er lig med to rette. Følgelig er z = 2x. Tilsvarende for <ACO. Altså er <ACB halvt så stor som <AOB.

Specielt gælder de ovenfor benyttede sætninger:

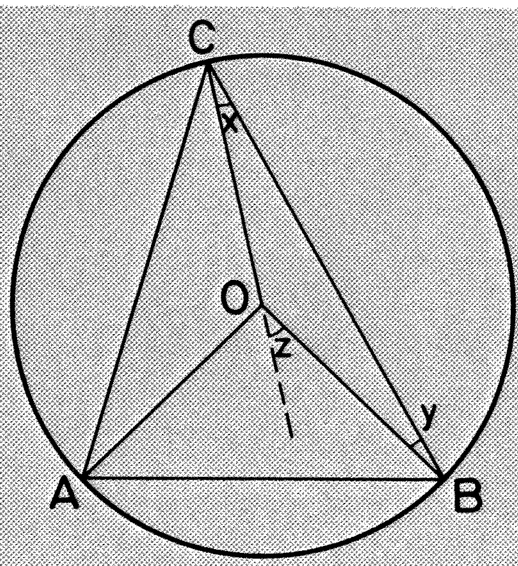

Fig. 17

1) **Periferivinkler, der spænder over den samme bue, er lige store.**
2) **En periferivinkel er ret, hvis og kun hvis den spænder over en halvcirkel (eller en diameter).**