Kompositionsregler

Husk fra sidste gang:

Kompositionsregler

Husk fra sidste gang:

En *kompositionsregel* (eller *binær operation*) på en mængde X er en funktion $f : X \times X \to X$. Funktionsværdien $f(x, y)$ kaldes *kompositionen* af x og y (med reglen f).

Kompositionsregler

Husk fra sidste gang:

En *kompositionsregel* (eller *binær operation*) på en mængde X er en funktion $f : X \times X \to X$. Funktionsværdien $f(x, y)$ kaldes *kompositionen* af x og y (med reglen f).

I stedet for at skrive $f(x, y)$, så skriver vi normalt $x \cdot y$ eller $x \star y$, eller noget lignende. Man kan også bruge $x + y$, men det er lidt farligt. En anden mulighed er bare at skrive xy.

Associativitet og kommutativitet

Husk at kompositionsreglen $\star$ (på en mængde X) siges at være

Associativitet og kommutativitet

Husk at kompositionsreglen $\star$ (på en mængde X) siges at være

- *Associativ* hvis $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ for alle $x, y, z \in X$;

Associativitet og kommutativitet

Husk at kompositionsreglen $\star$ (på en mængde X) siges at være

- *Associativ* hvis $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ for alle $x, y, z \in X$;
- *Kommutativ* hvis $x \star y = y \star x$ for alle $x, y \in X$.

Associativitet og kommutativitet

Husk at kompositionsreglen $\star$ (på en mængde X) siges at være

- *Associativ* hvis $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ for alle $x, y, z \in X$;
- *Kommutativ* hvis $x \star y = y \star x$ for alle $x, y \in X$.

Hvis vi i stedet bruger funktionsnotation, så skrives associativitet som

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$$

Associativitet og kommutativitet

Husk at kompositionsreglen $\star$ (på en mængde X) siges at være

- *Associativ* hvis $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ for alle $x, y, z \in X$;
- *Kommutativ* hvis $x \star y = y \star x$ for alle $x, y \in X$.

Hvis vi i stedet bruger funktionsnotation, så skrives associativitet som

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$$

og kommutativitet skrives som

$$f(x, y) = f(y, z).$$

Associativitet og kommutativitet

Husk at kompositionsreglen $\star$ (på en mængde X) siges at være

- *Associativ* hvis $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ for alle $x, y, z \in X$;
- *Kommutativ* hvis $x \star y = y \star x$ for alle $x, y \in X$.

Hvis vi i stedet bruger funktionsnotation, så skrives associativitet som

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$$

og kommutativitet skrives som

$$f(x, y) = f(y, z).$$

I denne notation ser specielt associativitet ret pudsig ud!

Neutralt element

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X.

Neutralt element

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X.

- $e \in X$ er et *neutralt element* for $\star$ hvis der gælder

$$(\forall x \in X) x \star e = e \star x = x.$$

Neutralt element

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X.

- $e \in X$ er et *neutralt element* for $\star$ hvis der gælder

$$(\forall x \in X) x \star e = e \star x = x.$$

Sætning. Hvis $\star$ har et neutralt element, så er det entydigt bestemt.

Neutralt element

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X.

- $e \in X$ er et *neutralt element* for $\star$ hvis der gælder

$$(\forall x \in X) x \star e = e \star x = x.$$

Sætning. Hvis $\star$ har et neutralt element, så er det entydigt bestemt.

Bevis: Hvis $e' \in X$ også er et neutralt element, så gælder

Neutralt element

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X.

- $e \in X$ er et *neutralt element* for $\star$ hvis der gælder

$$(\forall x \in X) x \star e = e \star x = x.$$

Sætning. Hvis $\star$ har et neutralt element, så er det entydigt bestemt.

Bevis: Hvis $e' \in X$ også er et neutralt element, så gælder

$$e' = e \star e' = e.$$

Inverse elementer

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X som har et neutralt element $e \in X$. Lad $x \in X$.

Inverse elementer

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X som har et neutralt element $e \in X$. Lad $x \in X$.

- Et *inverst element* til x er et element $y \in X$ sådan at

$$x \star y = y \star x = e.$$

Inverse elementer

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X som har et neutralt element $e \in X$. Lad $x \in X$.

- Et *inverst element* til x er et element $y \in X$ sådan at

$$x \star y = y \star x = e.$$

(Vi siger også at y er invers til x).

Inverse elementer

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X som har et neutralt element $e \in X$. Lad $x \in X$.

- Et *inverst element* til x er et element $y \in X$ sådan at

$$x \star y = y \star x = e.$$

  (Vi siger også at y er invers til x).

Sætning. Lad $\star$ være en associativ kompositionsregel på X, og antag at $e \in X$ er et neutralt element for $\star$. Da gælder, at hvis x har et inverst element, så er dette entydigt bestemt.

Inverse elementer

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X som har et neutralt element $e \in X$. Lad $x \in X$.

- Et *inverst element* til x er et element $y \in X$ sådan at

$$x \star y = y \star x = e.$$

(Vi siger også at y er invers til x).

Sætning. Lad $\star$ være en associativ kompositionsregel på X, og antag at $e \in X$ er et neutralt element for $\star$. Da gælder, at hvis x har et inverst element, så er dette entydigt bestemt.

Bevis: Hvis både y og y' er inverse elementer til x, så gælder

Inverse elementer

Lad $\star$ være en kompositionsregel på en mængde X som har et neutralt element $e \in X$. Lad $x \in X$.

- Et *inverst element* til x er et element $y \in X$ sådan at

$$x \star y = y \star x = e.$$

  (Vi siger også at y er invers til x).

Sætning. Lad $\star$ være en associativ kompositionsregel på X, og antag at $e \in X$ er et neutralt element for $\star$. Da gælder, at hvis x har et inverst element, så er dette entydigt bestemt.

Bevis: Hvis både y og y' er inverse elementer til x, så gælder

$$y' = y' \star e = y' \star (x \star y) = (y' \star x) \star y = e \star y = y.$$

Grupper

Definition

En gruppe er et par $(G, \star)$, hvor $\star$ er en kompositionsregel på G, og der gælder:

Grupper

Definition

En gruppe er et par $(G, \star)$, hvor $\star$ er en kompositionsregel på G, og der gælder:

- $\star$ er associativ, dvs. $(\forall x, y, z \in G) x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.

Grupper

Definition

En gruppe er et par $(G, \star)$, hvor $\star$ er en kompositionsregel på G, og der gælder:

- $\star$ er associativ, dvs. $(\forall x, y, z \in G) x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.
- $\star$ har et inverst element $e \in G$.

Grupper

Definition

En gruppe er et par $(G, \star)$, hvor $\star$ er en kompositionsregel på G, og der gælder:

- $\star$ er associativ, dvs. $(\forall x, y, z \in G) x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.
- $\star$ har et inverst element $e \in G$.
- Ethvert $x \in G$ har en invers (m.h.t. $\star$).

Grupper

Definition

En gruppe er et par $(G, \star)$, hvor $\star$ er en kompositionsregel på G, og der gælder:

- $\star$ er associativ, dvs. $(\forall x, y, z \in G) x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.
- $\star$ har et inverst element $e \in G$.
- Ethvert $x \in G$ har en invers (m.h.t. $\star$).

Notation: 1. Da inverse elementer er entydigt bestemt i en gruppe (da kompositionsreglen er associativ) skriver man ofte x^{-1} for det inverse element af x. Bemærk at $e^{-1} = e$.

Grupper

Definition

En gruppe er et par $(G, \star)$, hvor $\star$ er en kompositionsregel på G, og der gælder:

- $\star$ er associativ, dvs. $(\forall x, y, z \in G) x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.
- $\star$ har et inverst element $e \in G$.
- Ethvert $x \in G$ har en invers (m.h.t. $\star$).

Notation: 1. Da inverse elementer er entydigt bestemt i en gruppe (da kompositionsreglen er associativ) skriver man ofte x^{-1} for det inverse element af x. Bemærk at $e^{-1} = e$.

2. Det er meget almindeligt at bruge symbolet $\cdot$ for kompositionen i en gruppe, e.g., $x \cdot y$ for kompositionen af x og y. Nogen gange dropper man helt kompositionssymbolet og skriver bare xy.

Grupper

Definition

En gruppe er et par $(G, \star)$, hvor $\star$ er en kompositionsregel på G, og der gælder:

- $\star$ er associativ, dvs. $(\forall x, y, z \in G) x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$.
- $\star$ har et inverst element $e \in G$.
- Ethvert $x \in G$ har en invers (m.h.t. $\star$).

Notation: 1. Da inverse elementer er entydigt bestemt i en gruppe (da kompositionsreglen er associativ) skriver man ofte x^{-1} for det inverse element af x. Bemærk at $e^{-1} = e$.

2. Det er meget almindeligt at bruge symbolet $\cdot$ for kompositionen i en gruppe, e.g., $x \cdot y$ for kompositionen af x og y. Nogen gange dropper man helt kompositionssymbolet og skriver bare xy.

3. Kompositionen i en gruppe G kaldes som regel gruppens *operation* eller *gruppeoperationen i G*.

Eksempler på grupper

- $(\mathbb{R}, +)$, dvs. mængden $\mathbb{R}$ med operationen $+$ er en gruppe. Her skriver man som regel $-x$ i stedet for x^{-1} (!) og man skriver 0 for e. Bemærk at gruppeoperationen $+$ også er kommutativ. (Dette er lidt specielt.)

Eksempler på grupper

- $(\mathbb{R}, +)$, dvs. mængden $\mathbb{R}$ med operationen $+$ er en gruppe. Her skriver man som regel $-x$ i stedet for x^{-1} (!) og man skriver 0 for e. Bemærk at gruppeoperationen $+$ også er kommutativ. (Dette er lidt specielt.)
- Hvis A er en (ikke-tom) mængde, så er $(\Sigma(A), \circ)$ en gruppe, hvor gruppeoperationen er givet ved sammensætning $\circ$. Denne gruppe kaldes *permutationsgruppen på* A. Bemærk, at hvis $|A| \geq 3$ så er $\Sigma(A)$ ikke en kommutativ gruppe.

Eksempler på grupper

- $(\mathbb{R}, +)$, dvs. mængden $\mathbb{R}$ med operationen $+$ er en gruppe. Her skriver man som regel $-x$ i stedet for x^{-1} (!) og man skriver 0 for e. Bemærk at gruppeoperationen $+$ også er kommutativ. (Dette er lidt specielt.)
- Hvis A er en (ikke-tom) mængde, så er $(\Sigma(A), \circ)$ en gruppe, hvor gruppeoperationen er givet ved sammensætning $\circ$. Denne gruppe kaldes *permutationsgruppen på* A. Bemærk, at hvis $|A| \geq 3$ så er $\Sigma(A)$ ikke en kommutativ gruppe.
- Lad $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ være mængden af invertible $n \times n$ matricer med reelle koefficienter. Da er $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en gruppe under operationen matrixmultiplikation. Det neutraler element er enhedsmatricen, og det inverse element af en matrix B er B's inverse matrix. Denne gruppe er ikke kommutativ hvis $n \geq 2$.

Eksempler på grupper

- $(\mathbb{R}, +)$, dvs. mængden $\mathbb{R}$ med operationen $+$ er en gruppe. Her skriver man som regel $-x$ i stedet for x^{-1} (!) og man skriver 0 for e. Bemærk at gruppeoperationen $+$ også er kommutativ. (Dette er lidt specielt.)
- Hvis A er en (ikke-tom) mængde, så er $(\Sigma(A), \circ)$ en gruppe, hvor gruppeoperationen er givet ved sammensætning $\circ$. Denne gruppe kaldes *permutationsgruppen på A*. Bemærk, at hvis $|A| \geq 3$ så er $\Sigma(A)$ ikke en kommutativ gruppe.
- Lad $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ være mængden af invertible $n \times n$ matricer med reelle koefficienter. Da er $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en gruppe under operationen matrixmultiplikation. Det neutraler element er enhedsmatricen, og det inverse element af en matrix B er B's inverse matrix. Denne gruppe er ikke kommutativ hvis $n \geq 2$.
- Osv! Der er grupper overalt i matematik!

Abelske grupper

Eksemplet $(\mathbb{R}, +)$ er lidt specielt (og specielt vigtigt) idet gruppeoperationen $+$ er kommutativ.

Abelske grupper

Eksemplet $(\mathbb{R}, +)$ er lidt specielt (og specielt vigtigt) idet gruppeoperationen $+$ er kommutativ.

Definition

En gruppe $(G, \cdot)$ kaldes **abelsk** hvis gruppeoperationen $\cdot$ er kommutativ.

Abelske grupper

Eksemplet $(\mathbb{R}, +)$ er lidt specielt (og specielt vigtigt) idet gruppeoperationen $+$ er kommutativ.

Definition

En gruppe $(G, \cdot)$ kaldes **abelsk** hvis gruppeoperationen $\cdot$ er kommutativ.

- $(\mathbb{R}, +)$ og $(\mathbb{Z}, +)$ eksempler på abelske grupper.

Abelske grupper

Eksemplet $(\mathbb{R}, +)$ er lidt specielt (og specielt vigtigt) idet gruppeoperationen $+$ er kommutativ.

Definition

En gruppe $(G, \cdot)$ kaldes **abelsk** hvis gruppeoperationen $\cdot$ er kommutativ.

- $(\mathbb{R}, +)$ og $(\mathbb{Z}, +)$ eksempler på abelske grupper. Ligeledes $(\mathbb{Q}, +)$.

Abelske grupper

Eksemplet $(\mathbb{R}, +)$ er lidt specielt (og specielt vigtigt) idet gruppeoperationen $+$ er kommutativ.

Definition

En gruppe $(G, \cdot)$ kaldes **abelsk** hvis gruppeoperationen $\cdot$ er kommutativ.

- $(\mathbb{R}, +)$ og $(\mathbb{Z}, +)$ eksempler på abelske grupper. Ligeledes $(\mathbb{Q}, +)$.
- $(]0, \infty[, \cdot)$ (almindelig multiplikation af positive tal) er en abelsk gruppe.

Abelske grupper

Eksemplet $(\mathbb{R}, +)$ er lidt specielt (og specielt vigtigt) idet gruppeoperationen $+$ er kommutativ.

Definition

En gruppe $(G, \cdot)$ kaldes **abelsk** hvis gruppeoperationen $\cdot$ er kommutativ.

- $(\mathbb{R}, +)$ og $(\mathbb{Z}, +)$ eksempler på abelske grupper. Ligeledes $(\mathbb{Q}, +)$.
- $(]0, \infty[, \cdot)$ (almindelig multiplikation af positive tal) er en abelsk gruppe.
- $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$, dvs. mængden af komplekse tal med modulus 1 er en gruppe under almindelig kompleks multiplikation. Denne gruppe kaldes *cirkelgruppen*, og betegnes $\mathbb{T}$ eller $\mathbb{S}^1$.

Abelske grupper

Eksemplet $(\mathbb{R}, +)$ er lidt specielt (og specielt vigtigt) idet gruppeoperationen $+$ er kommutativ.

Definition

En gruppe $(G, \cdot)$ kaldes **abelsk** hvis gruppeoperationen $\cdot$ er kommutativ.

- $(\mathbb{R}, +)$ og $(\mathbb{Z}, +)$ eksempler på abelske grupper. Ligeledes $(\mathbb{Q}, +)$.
- $(]0, \infty[, \cdot)$ (almindelig multiplikation af positive tal) er en abelsk gruppe.
- $(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \cdot)$, dvs. mængden af komplekse tal med modulus 1 er en gruppe under almindelig kompleks multiplikation. Denne gruppe kaldes *cirkelgruppen*, og betegnes $\mathbb{T}$ eller $\mathbb{S}^1$.
- $(\Sigma(A), \circ)$ er abelsk hvis og kun hvis $|A| \leq 2$.