Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.
2. Logiske symboler: $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff,), ($.

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler (“sprog”):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.
2. Logiske symboler: $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff,), ($.

De udsagnsvariable kan antage værdierne sand eller falsk (s eller f).

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.
2. Logiske symboler: $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff,), ($.

De udsagnsvariable kan antage værdierne sand eller falsk (s eller f).

Formelle udsagn dannes ved at kombinere udsagn. F. eks., hvis ψ og φ er formelle udsagn, så er $(\psi \wedge \varphi)$ et (nyt) formelt udsagn:

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.
2. Logiske symboler: $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff,), ($.

De udsagnsvariable kan antage værdierne sand eller falsk (s eller f).

Formelle udsagn dannes ved at kombinere udsagn. F. eks., hvis ψ og φ er formelle udsagn, så er $(\psi \wedge \varphi)$ et (nyt) formelt udsagn:
Definition.

1. Alle udsagnsvariable er formelle udsagn.

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.
2. Logiske symboler: $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff,), ($.

De udsagnsvariable kan antage værdierne sand eller falsk (s eller f).

Formelle udsagn dannes ved at kombinere udsagn. F. eks., hvis ψ og φ er formelle udsagn, så er $(\psi \wedge \varphi)$ et (nyt) formelt udsagn:

Definition.

1. Alle udsagnsvariable er formelle udsagn.
2. Hvis ψ og φ er formelle udsagn, da er $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \vee \varphi)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \implies \varphi)$ og $(\psi \iff \varphi)$ formelle udsagn.

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.
2. Logiske symboler: $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff,), ($.

De udsagnsvariable kan antage værdierne sand eller falsk (s eller f).

Formelle udsagn dannes ved at kombinere udsagn. F. eks., hvis ψ og φ er formelle udsagn, så er $(\psi \wedge \varphi)$ et (nyt) formelt udsagn:

Definition.

1. Alle udsagnsvariable er formelle udsagn.
2. Hvis ψ og φ er formelle udsagn, da er $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \vee \varphi)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \implies \varphi)$ og $(\psi \iff \varphi)$ formelle udsagn.
3. Intet er et formelt udsagn *medmindre* 1 og 2 kræver det.

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.
2. Logiske symboler: $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff,), ($.

De udsagnsvariable kan antage værdierne sand eller falsk (s eller f).

Formelle udsagn dannes ved at kombinere udsagn. F. eks., hvis ψ og φ er formelle udsagn, så er $(\psi \wedge \varphi)$ et (nyt) formelt udsagn:
Definition.

1. Alle udsagnsvariable er formelle udsagn.
2. Hvis ψ og φ er formelle udsagn, da er $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \vee \varphi)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \implies \varphi)$ og $(\psi \iff \varphi)$ formelle udsagn.
3. Intet er et formelt udsagn *medmindre* 1 og 2 kræver det.

Formel logik

Sidste gang: Formelle udsagn opbygges af følgende symboler ("sprog"):

1. Udsagnsvariable, betegnet $p, q, r, p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$.
2. Logiske symboler: $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff,), ($.

De udsagnsvariable kan antage værdierne sand eller falsk (s eller f).

Formelle udsagn dannes ved at kombinere udsagn. F. eks., hvis ψ og φ er formelle udsagn, så er $(\psi \wedge \varphi)$ et (nyt) formelt udsagn:
Definition.

1. Alle udsagnsvariable er formelle udsagn.
2. Hvis ψ og φ er formelle udsagn, da er $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \vee \varphi)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \implies \varphi)$ og $(\psi \iff \varphi)$ formelle udsagn.
3. Intet er et formelt udsagn *medmindre* 1 og 2 kræver det.

P.S. Vi gider ikke sige "formelle" hele tiden og siger ofte bare "udsagn".

Sandhedstavle

Hvis hver udsagnsvariabel i et (formelt) udsagn σ gives en sandhedsværdi (s eller f), da kan sandhedsværdien af σ selv også bestemmes. Dette gøres (rekursivt) ud fra følgende regler:

Sandhedstavle

Hvis hver udsagnsvariabel i et (formelt) udsagn σ gives en sandhedsværdi (s eller f), da kan sandhedsværdien af σ selv også bestemmes. Dette gøres (rekursivt) ud fra følgende regler:

- Hvis σ er en udsagnsvariabel, da er σ's sandhedsværdi det samme som udsagnsvariablens værdi.

Sandhedstavle

Hvis hver udsagnsvariabel i et (formelt) udsagn σ gives en sandhedsværdi (s eller f), da kan sandhedsværdien af σ selv også bestemmes. Dette gøres (rekursivt) ud fra følgende regler:

- Hvis σ er en udsagnsvariabel, da er σ's sandhedsværdi det samme som udsagnsvariablens værdi.
- Ellers er σ på formen $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \vee \varphi)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \implies \varphi)$, $(\psi \iff \varphi)$, hvor ψ og φ er (formelle) udsagn, og σ's sandhedsværdi er fastlagt ud fra sandhedstavlen:

Sandhedstavle

Hvis hver udsagnsvariabel i et (formelt) udsagn σ gives en sandhedsværdi (s eller f), da kan sandhedsværdien af σ selv også bestemmes. Dette gøres (rekursivt) ud fra følgende regler:

- Hvis σ er en udsagnsvariabel, da er σ's sandhedsværdi det samme som udsagnsvariablens værdi.
- Ellers er σ på formen $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \vee \varphi)$, $(\neg\psi)$, $(\psi \implies \varphi)$, $(\psi \iff \varphi)$, hvor ψ og φ er (formelle) udsagn, og σ's sandhedsværdi er fastlagt ud fra sandhedstavlen:

ψ	φ	$(\psi \wedge \varphi)$	$(\psi \vee \varphi)$	$(\neg\psi)$	$(\psi \implies \varphi)$	$(\psi \iff \varphi)$
s	s	s	s	f	s	s
s	f	f	s	f	f	f
f	s	f	s	s	s	f
f	f	f	f	s	s	s

Sandhedstavlesætningen

Sætning. Hvis σ er et (formelt) udsagn, da er σ's sandhedsværdi entydigt fastlagt ud fra reglerne beskrevet i sandhedstavlen.

Sandhedstavlesætningen

Sætning. Hvis σ er et (formelt) udsagn, da er σ's sandhedsværdi entydigt fastlagt ud fra reglerne beskrevet i sandhedstavlen.

Mere præcist: Hvis alle udsagnsvariable i σ er blevet givet ("tilskrevet") en sandhedsværdi, da kan σ's sandhedsværdi fastligges ved hjælp af en sandhedstavle ud fra reglerne for $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff$ givet på foregående side.

Sandhedstavlesætningen

Sætning. Hvis σ er et (formelt) udsagn, da er σ's sandhedsværdi entydigt fastlagt ud fra reglerne beskrevet i sandhedstavlen.

Mere præcist: Hvis alle udsagnsvariable i σ er blevet givet ("tilskrevet") en sandhedsværdi, da kan σ's sandhedsværdi fastligges ved hjælp af en sandhedstavle ud fra reglerne for $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff$ givet på foregående side.

Definition. Hvis de udsagnsvariable i et udsagn γ er blevet tilskrevet sandhedsværdier, og γ under denne tilskrivining er sand, da siger vi at γ "er opfyldt" under denne tilskrivning af de variable.

Sandhedstavlesætningen

Sætning. Hvis σ er et (formelt) udsagn, da er σ's sandhedsværdi entydigt fastlagt ud fra reglerne beskrevet i sandhedstavlen.

Mere præcist: Hvis alle udsagnsvariable i σ er blevet givet ("tilskrevet") en sandhedsværdi, da kan σ's sandhedsværdi fastligges ved hjælp af en sandhedstavle ud fra reglerne for $\wedge, \vee, \neg, \implies, \iff$ givet på foregående side.

Definition. Hvis de udsagnsvariable i et udsagn γ er blevet tilskrevet sandhedsværdier, og γ under denne tilskrivining er sand, da siger vi at γ "er opfyldt" under denne tilskrivning af de variable.

Mere generelt: Hvis Γ er en mængde af udsagn, som alle er sande under en bestemt tilskrivning af værdier til de udsagnsvariable, da siger vi at Γ er opfyldt under denne tilskrivning.

Tautologi og ækvivalens

Definition.

1. Et udsagn σ kaldes en tautologi hvis sandhedsværdien af σ altid er s (sand) ligegyldig hvilken sandhedsværdi de udsagnsvariable har.

Tautologi og ækvivalens

Definition.

1. Et udsagn σ kaldes en tautologi hvis sandhedsværdien af σ altid er s (sand) ligegyldig hvilken sandhedsværdi de udsagnsvariable har.
2. Et udsagn σ som altid er falskt ligegyldig hvilke værdier de indgående udsagnsvariable har kaldes et *falsum* eller en *modstrid*, eller nogen gange også *absurditeten*.

Tautologi og ækvivalens

Definition.

1. Et udsagn σ kaldes en tautologi hvis sandhedsværdien af σ altid er *s* (sand) ligegyldig hvilken sandhedsværdi de udsagnsvariable har.
2. Et udsagn σ som altid er falskt ligegyldig hvilke værdier de indgående udsagnsvariable har kaldes et *falsum* eller en *modstrid*, eller nogen gange også *absurditeten*.
3. To udsagn ψ og φ siges at være *ækvivalente* hvis de altid antager samme sandhedsværdi når sandhedsværdien af de udsagnsvariable i ψ og φ er fastlagt. Med andre ord: ψ og φ er ækvivalente hvis og kun hvis $(\psi \iff \varphi)$ er en tautologi.

Tautologi og ækvivalens

Definition.

1. Et udsagn σ kaldes en tautologi hvis sandhedsværdien af σ altid er *s* (sand) ligegyldig hvilken sandhedsværdi de udsagnsvariable har.
2. Et udsagn σ som altid er falskt ligegyldig hvilke værdier de indgående udsagnsvariable har kaldes et *falsum* eller en *modstrid*, eller nogen gange også *absurditeten*.
3. To udsagn ψ og φ siges at være *ækvivalente* hvis de altid antager samme sandhedsværdi når sandhedsværdien af de udsagnsvariable i ψ og φ er fastlagt. Med andre ord: ψ og φ er ækvivalente hvis og kun hvis $(\psi \iff \varphi)$ er en tautologi.

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \land \phi \equiv \phi \land \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \lor \phi \equiv \phi \lor \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \land \phi) \land \rho \equiv \psi \land (\phi \land \rho)$ (associativitet).

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \wedge \phi) \wedge \rho \equiv \psi \wedge (\phi \wedge \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \vee \phi) \vee \rho \equiv \psi \vee (\phi \vee \rho)$ (associativitet).

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \wedge \phi) \wedge \rho \equiv \psi \wedge (\phi \wedge \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \vee \phi) \vee \rho \equiv \psi \vee (\phi \vee \rho)$ (associativitet).
6. $(\psi \wedge \phi) \vee \rho \equiv (\psi \vee \rho) \wedge (\phi \vee \rho)$ (distributivitet).

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \wedge \phi) \wedge \rho \equiv \psi \wedge (\phi \wedge \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \vee \phi) \vee \rho \equiv \psi \vee (\phi \vee \rho)$ (associativitet).
6. $(\psi \wedge \phi) \vee \rho \equiv (\psi \vee \rho) \wedge (\phi \vee \rho)$ (distributivitet).
7. $(\psi \vee \phi) \wedge \rho \equiv (\psi \wedge \rho) \vee (\phi \wedge \rho)$ (distributivitet).

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \wedge \phi) \wedge \rho \equiv \psi \wedge (\phi \wedge \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \vee \phi) \vee \rho \equiv \psi \vee (\phi \vee \rho)$ (associativitet).
6. $(\psi \wedge \phi) \vee \rho \equiv (\psi \vee \rho) \wedge (\phi \vee \rho)$ (distributivitet).
7. $(\psi \vee \phi) \wedge \rho \equiv (\psi \wedge \rho) \vee (\phi \wedge \rho)$ (distributivitet).
8. $(\neg(\psi \wedge \phi)) \equiv (\neg\psi) \vee (\neg\phi)$ (De Morgan's lov I).

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \wedge \phi) \wedge \rho \equiv \psi \wedge (\phi \wedge \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \vee \phi) \vee \rho \equiv \psi \vee (\phi \vee \rho)$ (associativitet).
6. $(\psi \wedge \phi) \vee \rho \equiv (\psi \vee \rho) \wedge (\phi \vee \rho)$ (distributivitet).
7. $(\psi \vee \phi) \wedge \rho \equiv (\psi \wedge \rho) \vee (\phi \wedge \rho)$ (distributivitet).
8. $(\neg(\psi \wedge \phi)) \equiv (\neg\psi) \vee (\neg\phi)$ (De Morgan's lov I).
9. $(\neg(\psi \vee \phi)) \equiv (\neg\psi) \wedge (\neg\phi)$ (De Morgan's lov II).

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \land \phi \equiv \phi \land \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \lor \phi \equiv \phi \lor \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \land \phi) \land \rho \equiv \psi \land (\phi \land \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \lor \phi) \lor \rho \equiv \psi \lor (\phi \lor \rho)$ (associativitet).
6. $(\psi \land \phi) \lor \rho \equiv (\psi \lor \rho) \land (\phi \lor \rho)$ (distributivitet).
7. $(\psi \lor \phi) \land \rho \equiv (\psi \land \rho) \lor (\phi \land \rho)$ (distributivitet).
8. $(\neg(\psi \land \phi)) \equiv (\neg\psi) \lor (\neg\phi)$ (De Morgan's lov I).
9. $(\neg(\psi \lor \phi)) \equiv (\neg\psi) \land (\neg\phi)$ (De Morgan's lov II).
10. $(\psi \implies \phi) \equiv (\neg\psi) \lor \phi$

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \wedge \phi) \wedge \rho \equiv \psi \wedge (\phi \wedge \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \vee \phi) \vee \rho \equiv \psi \vee (\phi \vee \rho)$ (associativitet).
6. $(\psi \wedge \phi) \vee \rho \equiv (\psi \vee \rho) \wedge (\phi \vee \rho)$ (distributivitet).
7. $(\psi \vee \phi) \wedge \rho \equiv (\psi \wedge \rho) \vee (\phi \wedge \rho)$ (distributivitet).
8. $(\neg(\psi \wedge \phi)) \equiv (\neg\psi) \vee (\neg\phi)$ (De Morgan's lov I).
9. $(\neg(\psi \vee \phi)) \equiv (\neg\psi) \wedge (\neg\phi)$ (De Morgan's lov II).
10. $(\psi \implies \phi) \equiv (\neg\psi) \vee \phi$
11. $(\psi \implies \phi) \equiv (\neg\phi) \implies (\neg\psi)$ (kontraposition)

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \wedge \phi) \wedge \rho \equiv \psi \wedge (\phi \wedge \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \vee \phi) \vee \rho \equiv \psi \vee (\phi \vee \rho)$ (associativitet).
6. $(\psi \wedge \phi) \vee \rho \equiv (\psi \vee \rho) \wedge (\phi \vee \rho)$ (distributivitet).
7. $(\psi \vee \phi) \wedge \rho \equiv (\psi \wedge \rho) \vee (\phi \wedge \rho)$ (distributivitet).
8. $(\neg(\psi \wedge \phi)) \equiv (\neg\psi) \vee (\neg\phi)$ (De Morgan's lov I).
9. $(\neg(\psi \vee \phi)) \equiv (\neg\psi) \wedge (\neg\phi)$ (De Morgan's lov II).
10. $(\psi \implies \phi) \equiv (\neg\psi) \vee \phi$
11. $(\psi \implies \phi) \equiv (\neg\phi) \implies (\neg\psi)$ (kontraposition)

Logisk huskeseddel

Lad ψ, ϕ, ρ være udsagn. Da gælder:

1. $(\neg(\neg\psi) \equiv \psi$.
2. $\psi \wedge \phi \equiv \phi \wedge \psi$ (kommutativitet).
3. $\psi \vee \phi \equiv \phi \vee \psi$ (kommutativitet).
4. $(\psi \wedge \phi) \wedge \rho \equiv \psi \wedge (\phi \wedge \rho)$ (associativitet).
5. $(\psi \vee \phi) \vee \rho \equiv \psi \vee (\phi \vee \rho)$ (associativitet).
6. $(\psi \wedge \phi) \vee \rho \equiv (\psi \vee \rho) \wedge (\phi \vee \rho)$ (distributivitet).
7. $(\psi \vee \phi) \wedge \rho \equiv (\psi \wedge \rho) \vee (\phi \wedge \rho)$ (distributivitet).
8. $(\neg(\psi \wedge \phi)) \equiv (\neg\psi) \vee (\neg\phi)$ (De Morgan's lov I).
9. $(\neg(\psi \vee \phi)) \equiv (\neg\psi) \wedge (\neg\phi)$ (De Morgan's lov II).
10. $(\psi \implies \phi) \equiv (\neg\psi) \vee \phi$
11. $(\psi \implies \phi) \equiv (\neg\phi) \implies (\neg\psi)$ (kontraposition)

Kvantifikation

Som tidligere nævnt, så kigger vi matematikken tit også på åbne udsagn ("prædikater"), som f. eks. $xy \geq 0$, hvor x og y er *variable*.

Kvantifikation

Som tidligere nævnt, så kigger vi matematikken tit også på åbne udsagn ("prædikater"), som f. eks. $xy \geq 0$, hvor x og y er *variable*. Ud fra prædikater kan vi danne nye udsagn og prædikater ved *kvantifikation*:

Kvantifikation

Som tidligere nævnt, så kigger vi matematikken tit også på åbne udsagn ("prædikater"), som f. eks. $xy \geq 0$, hvor x og y er *variable*. Ud fra prædikater kan vi danne nye udsagn og prædikater ved *kvantifikation*:

- Der findes x så at $y = 0 \vee xy > 0$. (Dette er et prædikat i den fri variabel y)

Kvantifikation

Som tidligere nævnt, så kigger vi matematikken tit også på åbne udsagn ("prædikater"), som f. eks. $xy \geq 0$, hvor x og y er *variable*. Ud fra prædikater kan vi danne nye udsagn og prædikater ved *kvantifikation*:

- Der findes x så at $y = 0 \vee xy > 0$. (Dette er et prædikat i den fri variabel y)
- For alle y findes x så at $y = 0 \vee xy > 0$. (Dette er et udsagn).

Kvantorer: $\exists$ og $\forall$

Definition.

Kvantorer: $\exists$ og $\forall$

Definition.

Symbolet $\exists$ kaldes *eksistenskvantoren* og bruges i betydningen "der eksisterer" (eller "der findes").

Kvantorer: $\exists$ og $\forall$

Definition.

Symbolet $\exists$ kaldes *eksistenskvantoren* og bruges i betydningen "der eksisterer" (eller "der findes").

Symbolet $\forall$ kaldes *alkvantoren* og bruges i betydningen "for alle".

Kvantorer: $\exists$ og $\forall$

Definition.

Symbolet $\exists$ kaldes *eksistenskvantoren* og bruges i betydningen "der eksisterer" (eller "der findes").

Symbolet $\forall$ kaldes *alkvantoren* og bruges i betydningen "for alle".

- Prædikatet "der findes x så at $y = 0 \vee xy > 0$" kan altså skrives $(\exists x) y = 0 \vee xy > 0$.

Kvantorer: $\exists$ og $\forall$

Definition.

Symbolet $\exists$ kaldes *eksistenskvantoren* og bruges i betydningen "der eksisterer" (eller "der findes").

Symbolet $\forall$ kaldes *alkvantoren* og bruges i betydningen "for alle".

- Prædikatet "der findes x så at $y = 0 \vee xy > 0$" kan altså skrives $(\exists x) y = 0 \vee xy > 0$.
- Udsagnet "For alle y findes x så at $y = 0 \vee xy > 0$" kan skrives $(\forall y)(\exists x) y = 0 \vee xy > 0$.

Kvantorer: $\exists$ og $\forall$

Definition.

Symbolet $\exists$ kaldes *eksistenskvantoren* og bruges i betydningen "der eksisterer" (eller "der findes").

Symbolet $\forall$ kaldes *alkvantoren* og bruges i betydningen "for alle".

- Prædikatet "der findes x så at $y = 0 \vee xy > 0$" kan altså skrives $(\exists x) y = 0 \vee xy > 0$.
- Udsagnet "For alle y findes x så at $y = 0 \vee xy > 0$" kan skrives $(\forall y)(\exists x) y = 0 \vee xy > 0$.

Notation. Nogen (vores bog) skriver $\exists x : y = 0 \vee xy > 0$ og $\forall y = 0 \vee y \exists x : xy > 0$ i stedet. Det er fint, men formelt set vil det kræve at et nyt logisk symbol (:) indføres. Det er bedre at klare sig med hvad vi allerede har.

Domæne for $\exists$ og $\forall$

Det er vigtigt at angive hvilket *domæne* der kvantificeres over. Nogen gange er det implicit (kan forstås udfra den omkringstående tekst). Ofte er det en god ide at sige det explicit.

Domæne for $\exists$ og $\forall$

Det er vigtigt at angive hvilket *domæne* der kvantificeres over. Nogen gange er det implicit (kan forstås udfra den omkringstående tekst). Ofte er det en god ide at sige det explicit.

- Hvis i udsagnet $(\forall y)(\exists x) y = 0 \vee xy > 0$ det er underforstået af x og y er i $\mathbb{R}$, så er udsagnet sandt. Hvis $y \in \mathbb{Z}$ og $x \in \mathbb{N}$ så er udsagnet falskt.

Domæne for $\exists$ og $\forall$

Det er vigtigt at angive hvilket *domæne* der kvantificeres over. Nogen gange er det implicit (kan forstås udfra den omkringstående tekst). Ofte er det en god ide at sige det explicit.

- Hvis i udsagnet $(\forall y)(\exists x) y = 0 \vee xy > 0$ det er underforstået af x og y er i $\mathbb{R}$, så er udsagnet sandt. Hvis $y \in \mathbb{Z}$ og $x \in \mathbb{N}$ så er udsagnet falskt.
- For at være eksplicit kan man i stedet skrive:

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) y = 0 \vee xy > 0.$$

Så vil der ikke herske tvivl om domænet for kvantifikationen.

Logik med $\exists$ og $\forall$

Det ligger langt ud over dette kursus' rammer at behandle prædikatlogik og kvantorer korrekt. Så vi giver blot nogle retningslinier om hvordan man bruger dem:

Logik med $\exists$ og $\forall$

Det ligger langt ud over dette kursus' rammer at behandle prædikatlogik og kvantorer korrekt. Så vi giver blot nogle retningslinier om hvordan man bruger dem:

- Rækkefølgen af *alternerende* kvantorer (dvs., skiftevis $\forall$ og $\exists$) er uhyre vigtig:

Logik med ∃ og ∀

Det ligger langt ud over dette kursus' rammer at behandle prædikatlogik og kvantorer korrekt. Så vi giver blot nogle retningslinier om hvordan man bruger dem:

- Rækkefølgen af *alternerende* kvantorer (dvs., skiftevis ∀ og ∃) er uhyre vigtig: For eksempel er

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) y = 0 \vee xy > 0$$

  sandt

Logik med ∃ og ∀

Det ligger langt ud over dette kursus' rammer at behandle prædikatlogik og kvantorer korrekt. Så vi giver blot nogle retningslinier om hvordan man bruger dem:

- Rækkefølgen af *alternerende* kvantorer (dvs., skiftevis ∀ og ∃) er uhyre vigtig: For eksempel er

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) y = 0 \vee xy > 0$$

  sandt, hvorimod

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) y = 0 \vee xy > 0$$

  falskt.

Logik med $\exists$ og $\forall$

Det ligger langt ud over dette kursus' rammer at behandle prædikatlogik og kvantorer korrekt. Så vi giver blot nogle retningslinier om hvordan man bruger dem:

- Rækkefølgen af *alternerende* kvantorer (dvs., skiftevis $\forall$ og $\exists$) er uhyre vigtig: For eksempel er

  $$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) y = 0 \vee xy > 0$$

  sandt, hvorimod

  $$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) y = 0 \vee xy > 0$$

  falskt.(Tag $x = 0$ som modeksempel.)

Mere logik med $\exists$ og $\forall$

Derimod er rækkefølgen ikke vigtig når kvantorerne *ikke* alternerer:

Mere logik med $\exists$ og $\forall$

Derimod er rækkefølgen ikke vigtig når kvantorerne *ikke* alternerer:

- Hvis $\psi(x, y)$ er et prædikat i de variable x og y, så er

  $$(\exists x)(\exists y)\psi(x, y)$$

  logisk ækvivalent med

  $$(\exists y)(\exists x)\psi(x, y).$$

Mere logik med $\exists$ og $\forall$

Derimod er rækkefølgen ikke vigtig når kvantorerne *ikke* alternerer:

- Hvis $\psi(x, y)$ er et prædikat i de variable x og y, så er

  $$(\exists x)(\exists y)\psi(x, y)$$

  logisk ækvivalent med

  $$(\exists y)(\exists x)\psi(x, y).$$

  Det samme gælder for $\forall$.

Endnu mere logik med $\exists$ og $\forall$

Der er dog en undtagelse: Lad $\psi(x, y)$ være et prædikat. Hvis $(\exists y)(\forall x)\psi(x, y)$ holder, da må der også gælde at $(\forall x)(\exists y)\psi(x, y)$.

Endnu mere logik med $\exists$ og $\forall$

Der er dog en undtagelse: Lad $\psi(x, y)$ være et prædikat. Hvis $(\exists y)(\forall x)\psi(x, y)$ holder, da må der også gælde at $(\forall x)(\exists y)\psi(x, y)$.

(Grund: Det y som er vidne til at det føreste udsagn er sandt er også vidne til at det andet er sandt.)

Endnu mere logik med $\exists$ og $\forall$

Der er dog en undtagelse: Lad $\psi(x, y)$ være et prædikat. Hvis $(\exists y)(\forall x)\psi(x, y)$ holder, da må der også gælde at $(\forall x)(\exists y)\psi(x, y)$.

(Grund: Det y som er vidne til at det føreste udsagn er sandt er også vidne til at det andet er sandt.)

Men det er også den eneste generelle undtagelse.

Endnu mere logik med $\exists$ og $\forall$

Der er dog en undtagelse: Lad $\psi(x, y)$ være et prædikat. Hvis $(\exists y)(\forall x)\psi(x, y)$ holder, da må der også gælde at $(\forall x)(\exists y)\psi(x, y)$.

(Grund: Det y som er vidne til at det føreste udsagn er sandt er også vidne til at det andet er sandt.)

Men det er også den eneste generelle undtagelse.

Endnu mere logik med $\exists$ og $\forall$

Der er dog en undtagelse: Lad $\psi(x, y)$ være et prædikat. Hvis $(\exists y)(\forall x)\psi(x, y)$ holder, da må der også gælde at $(\forall x)(\exists y)\psi(x, y)$.

(Grund: Det y som er vidne til at det føreste udsagn er sandt er også vidne til at det andet er sandt.)

Men det er også den eneste generelle undtagelse.

Læs mere om hvordan man bruger kvantorer og prædikater i bogen. Og hvis I vil lære det rigtigt, så tag mit logikkursus (*Introduction to Mathematical Logic*).

Opgave

Se på de to beviser for at

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Opgave

Se på de to beviser for at

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Forklar hvad der sker i de to beviser. Hvad er ideen?

Opgave

Se på de to beviser for at

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Forklar hvad der sker i de to beviser. Hvad er ideen?
2. Bruges induktion nogen steder i det andet bevis?

Opgave

Se på de to beviser for at

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Forklar hvad der sker i de to beviser. Hvad er ideen?
2. Bruges induktion nogen steder i det andet bevis?
3. Hvilket bevis er bedst?

Svar?

1. Det første bevis er et induktionsbevis. Der er tilsyneladende ikke nogen ide udover at regne. Det andet bevis udnytter derimod det at summen af det j'te første og j'te sidste led i summen altid er $n+1$. I tilfældet hvor n er lige og alle led kan parres på denne måde er det derfor i særlig grad klart at summen er $\frac{n}{2}(n+1)$.

Svar?

1. Det første bevis er et induktionsbevis. Der er tilsyneladende ikke nogen ide udover at regne. Det andet bevis udnytter derimod det at summen af det j'te første og j'te sidste led i summen altid er $n+1$. I tilfældet hvor n er lige og alle led kan parres på denne måde er det derfor i særlig grad klart at summen er $\frac{n}{2}(n+1)$.
2. Ja, men det er godt skjult. Induktion skal nemlig i princippet bruges til at vise at den omordning af ledene, som foretages er korrekt.

Svar?

1. Det første bevis er et induktionsbevis. Der er tilsyneladende ikke nogen ide udover at regne. Det andet bevis udnytter derimod det at summen af det j'te første og j'te sidste led i summen altid er $n + 1$. I tilfældet hvor n er lige og alle led kan parres på denne måde er det derfor i særlig grad klart at summen er $\frac{n}{2}(n + 1)$.
2. Ja, men det er godt skjult. Induktion skal nemlig i princippet bruges til at vise at den omordning af ledene, som foretages er korrekt.
3. Fra et matematisk synspunkt er bevis nummer 2 nok bedst, fordi det ikke blot beviser udsagnet, men også forklarer hvorfor det er sandt. Det er altså et bevis som er knyttet sammen med en indsigt. Fra et strengt logisk synspunkt er det første bevis dog bedst, da det er mere formelt korrekt.