Matematik YY
Projektforløb om regulære polygoner

Søren Eilers

14. marts 2003

1 Projektbeskrivelse

Vi vil studere problemet om hvorfor regulære polygoner med n kanter kan indskrives i en cirkel ved hjælp af passer og lineal for visse, men ikke alle, værdier af n. I forløbet skulle du gerne komme til at forstå hvordan løsning af en familie af andengradsligninger kan føre til konstruktion af den regulære 17-kant, og ved hjælp af et computerprogram på egen hånd konstruere figuren. Tilsvarende skal du udføre de konstruktioner, der knytter regneoperationerne på komplekse tal sammen med konstruktionsproblemer af denne art. Det sidste vil sammen med de talteoretiske resultater, der allerede er udviklet i Matematik YY, føre frem til et argument for at fx den regulære 7-kant **ikke** kan konstrueres med passer og lineal.

1.1 Godkendelse

Projektforløbet har en teoretisk og en praktisk komponent. For at få godkendt projektet skal hver gruppe i computerprogrammet Elementa løse opgaver om at konstruere de regulære 5- og 17-kanter inden onsdag 020403 klokken 11:00. Elementa noterer i en database, som jeg har adgang til, når opgaverne løses. Det er tilstrækkeligt at én deltager i hver gruppe har løst opgaverne, idet det forudsættes at gruppen har arbejdet sammen om at løse opgaverne. Det er et krav at gruppen inden onsdag 260303 klokken 11:00 tilmelder sig som gruppe ved at sende en email til mig på `eilers@math.ku.dk` hvor der oplyses om gruppens deltagere.

Sådan som Elementa er opbygget kræver løsningen af disse to opgaver at samme bruger tidligere har løst omkring 30 mindre opgaver; nogle, der introducerer til brug af programmet, og andre i emnekredsen omkring konstruktion af regneoperationerne med komplekse tal, der er mere matematisk avancerede. Man må således påregne at skulle bruge en del tid på at arbejde med programmet i hver gruppe.

Deltagernes forståelse af den teoretiske komponent bliver ikke evalueret direkte.

1.2 Elementa

Elementa er et relativt nyt program som er udviklet ved Matematisk Afdelingen med støtte fra Dansk Center for Naturvidenskabsdidaktik og Naturvidenskabeligt IT-Kompetencecenter. *Det har aldrig før været benyttet som et obligatorisk element i et kursus, og det kan ikke forventes at være helt fejlfrit!*. Jeg vil naturligvis gøre alt hvad jeg kan for at minimere effekten af problemer med programmet, se herunder.

Programmet køres via www på en browser på adressen

`http://elementa.math.ku.dk`

Desværre fungerer programmet ikke med alle browsere og på alle platforme. Det er testet med succes i Internet Explorer på Windows-opsætningen i A108. Der er problemer med Netscape 6/Mozilla som vi forsøger at løse; ældre versioner af Netscape skulle fungere på de fleste platforme.

YY-deltagere bør logge ind med det brugernavn og det password som skulle være fremsendt i email til den adresse, der er registreret i undervisningsadministrationssystemet.

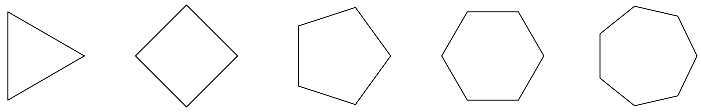
1.3 Faciliteter

Elementa indeholder et introduktionsforløb der skulle muliggøre at man selv sætter sig ind i programmets basale faciliteter. Det anbefales på det kraftigste at man har gennemført i hvert fald de første fire kapitler af dette forløb inden projektet tager fart i ugen der begynder den 17. marts.

Følgende aktiviteter er programsat:

- 180303, 0830-1100, A108: Deltagerne i hold 1 arbejder med Elementa i grupper mens SE fungerer som konsulent.
- 190303, 1115-1300, Aud 4: Teori gennemgås ved SE med udgangspunkt i vedlagte oplæg
- 210303, 0830-1100, A108: Deltagerne i hold 2 arbejder med Elementa i grupper mens SE fungerer som konsulent.
- 260303, 1115-1300, Aud 4: Teori gennemgås ved SE med udgangspunkt i [Jøn]

Derudover står jeg til rådighed i hele projektperioden som konsulent i brug af programmet. Send mig en email på `eilers@math.ku.dk` hvis I går i stå — da systemet er nyt, er det af stor værdi for mig at vide hvor problemer af den ene eller den anden art opstår, så I behøver ikke at holde jer tilbage. Svar på ofte stillede spørgsmål annonceres på



Figur 1: Regulære polygoner

http://www.math.ku.dk/~eilers/elementayy.html

Jeg er ligeledes meget taknemmelig over at høre om selv meget små fejl eller irritationsmomenter ved brug af systemet, allerhelst på email.

Jeg kan blive nødt til at rette fejl i programmet. Dette kan indebære at det ikke kan anvendes i korte perioder. Jeg vil forsøge at holde mig til tidsrummene 1100-1300 og 2300-0100 for sådanne opdateringer.

Søren

2 Oplæg

2.1 Regulære polygoner

Vi skal beskæftige os med den smukke teori om konstruktion af regulære polygoner. Selv om disse objekter, illustreret på Figur 1 med $3, \ldots, 7$ kanter, har vakt interesse hos matematikere siden antikken, var det først i slutningen af det attende århundrede at C.F. Gauss (1777-1855) afklarede spørgsmålet om deres konstruerbarhed ved passer og lineal.

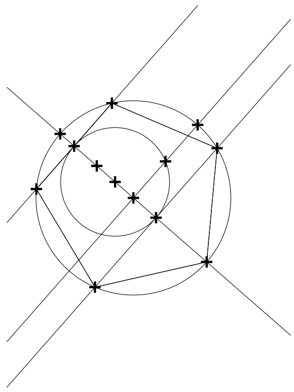
Løsningen på dette klassiske problem betragtes ofte som en personlig triumf for Gauss, måske fordi har selv lagde stor vægt på den, måske fordi det var hans første store opdagelse. Men set lidt bredere kan løsningen ses som et gennembrud, solidt forankret i antikkens syn på matematikken, for den moderne matematiks metode med at aritmetisere geometrien og derefter studere den ved hjælp af algebra og talteori. Så selv om konstruktioner med passer og lineal aldrig har haft, og næppe nogensinde vil få, nogen videre praktisk betydning, har studiet af disse spørgsmål ansporet til matematisk indsigt der har.

2.2 Konstruktion med passer og lineal

Vi skal betragte spørgsmålet:

Spørgsmål 2.1 For hvilke n kan den regulære polygon med n sider konstrueres?

Lad os først uddybe spørgsmålet. Den klassiske plangeometri tillader følgende operationer



Figur 2: Konstruktion af den regulære femkant

G1 Tegne den rette linje mellem to givne eller allerede konstruerede punkter.

G2 Udmåle afstanden mellem to givne eller allerede konstruerede punkter.

G3 Tegne cirklen med et givet eller allerede konstrueret punkt som centrum, og med en allerede udmålt afstand som radius.

G4 Opsøge skæringpunkter mellem to allerede konstruerede linjer eller cirkler.

I Spørgsmål 2.1 forestiller vi os at to punkter i planen allerede er givne, og spørger så om det er muligt ved en endelig sekvens af operationer af typen G1–G4 er muligt at konstruere den regulære polygon der har det ene af disse punkter som omdrejningspunkt, og det andet som et hjørne i polygonen. Man vil ofte tegne en cirkel med centrum i omdrejningspunktet gennem det andet givne punkt og sige at man har *indskrevet* polygonen i denne cirkel.

Grækerne kendte, som summeret i fjerde bog af [EuD], konstruktioner af de regulære polygoner med $3, 4, 5$ og 6 kanter, men fx ikke af 7-kanten. Hvis man blot kan halvere vinkler og linjestykker, og oprejse vinkelrette — tre elementære konstruktioner som formentlig er velkendte — kommer man uden videre frem til løsninger for $n = 3, 4, 6$. Konstruktionen for $n = 5$ er mindre oplagt men altså kendt i antikken. En moderne konstruktion (fra [Rmo]) ses på Figur 2.

Nøglen til Gauss' angreb på det generelle spørgsmål er en *aritmetisering* af problemet. Vi opfatter planen som den komplekse plan, og de to givne punkter som henholdsvis $0, 1 \in \mathbb{C}$. I det billede er målet for vores konstruktion fx den første $n$te enhedsrod, altså det komplekse tal α_n som opfylder

$$\alpha_n^n = 1 \qquad \alpha_n \neq 1 \tag{1}$$

og som har minimalt argument. Vi ved fra [ETP] at vi kan skrive

$$\alpha_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \tag{2}$$

men som vi skal se har det kun sekundær betydning her.

Lad os betragte følgende operationer på komplekse tal z_1 og z_2:

A1 Addere tallene til $z_1 + z_2$

A2 Subtrahere tallene til $z_1 - z_2$

A3 Multiplicere tallene til $z_1 z_2$

A4 Dividere tallene til z_1/z_2 $(z_2 \neq 0)$

A5 Uddrage en kvadratrod $\sqrt{z_1}$

A6 Bestemme kompleks konjugeret $\overline{z_1}$

Lad os betegne med $\mathfrak{K}$ mængen af de komplekse tal, der kan nås ud fra tallene 0 og 1 ved en endelig sekvens af operationer af typen A1-A6 herover. Da fx

$$-\frac{2}{3} = 0 - (1+1)/(1+1+1)$$

er $-\frac{2}{3} \in \mathfrak{K}$. Bemærk også at $i = \sqrt{-1} \in \mathfrak{K}$; faktisk ses det let at $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \subseteq \mathfrak{K}$. Men naturligvis er $\mathfrak{K}$ større, fx vil $\sqrt{2} \in \mathfrak{K}$. Relevansen af $\mathfrak{K}$ følger af

Proposition 2.2 *Punktet givet ved $z \in \mathbb{C}$ kan konstrueres ud fra punkterne 0 og 1 netop når $z \in \mathfrak{K}$.*

Bevisskitse: Antag at z kan konstrueres ud fra 0 og 1. Konstruktionen foregår ved hjælp af nogle støttepunkter $z_1, \ldots, z_n = z$, vi fører et induktionsbevis og antager dertil at $z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathfrak{K}$. Punktet z_m må komme frem ved G4, altså som skæringspunkt mellem konstruerede linjer og cirkler. Der er let at se at objekter konstrueret i G1 og G3 kan parametriseres

$$t \mapsto w_1 + re^{2\pi it} \qquad t \mapsto w_2 + t(w_3 - w_2)$$

hvor $w_1, w_2, w_3 \in \{z_1, \ldots, z_{n-1}\} \subseteq \mathfrak{K}$ er de benyttede punkter og r den benyttede afstand. Vi har at $r \in \mathfrak{K}$, for afstanden må være fremkommet ved G2 som

$$r = \sqrt{(w_3 - w_4)(\overline{w_3} - \overline{w_4})}$$

hvor $w_3, w_4 \in \{z_1, \ldots, z_{n-1}\} \subseteq \mathfrak{K}$. Og ved velkendte udregninger ses at skæringspunktet z_m kan findes som rod i et andengradspolynomium

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0,$$

hvor α, β, γ er linearkombinationer, med heltallige koefficienter, af tallene

$$r, r^2, r^3, r^4, w_i, w_i^2, w_i^3, w_i^4.$$

Vi konkluderer at $z_m \in \mathfrak{K}$, og per induktion at også $z \in \mathfrak{K}$.

Den anden implikation vises ved at anføre konkrete konstruktioner af $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, alene ud fra punkterne 0, 1, z_1 og z_2, og for $-z_1$, $1/z_1$, $\overline{z_1}$ og $\sqrt{z_1}$ alene ud fra punkterne 0, 1 og z_1. Der er ideer til nogle af de sværeste detaljer i at udføre sådanne kontruktioner på [Jøn, pp. 51-52]; en klassisk lærebog herom er [Pet]. ■

Af hvad vi allerede har set kan vi konkludere at $\alpha_n \in \mathfrak{K}$ for $n = 3, 4, 5, 6$. Med et computeralgebraværktøj får man let at

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \tag{3}$$

$$\alpha_4 = i \tag{4}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}i \tag{5}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \tag{6}$$

men sådanne værktøjer må give op overfor α_7, og giver et udtryk af formen

$$\alpha_9 = \frac{1}{2}(-4 + 4\sqrt{3}i)^{1/3},$$

der ikke hjælper til at afgøre om α_9 ligger i $\mathfrak{K}$.

Noter 2.3 *Det giver et godt indtryk af hvad værktøjer som Maple kan og ikke kan at bruge dem til at forsøge at bestemme enhedsrødder. Prøv fx at indtaste* `for n from 3 to 20 do solve(x**n=1);od;`

Lad os nu notere svaret på Spørgsmål 2.1:

Sætning 2.4 *Den regulære polygon med n kanter kan konstrueres hvis og kun hvis n har formen*

$$n = 2^{k_0} \cdot p_1 \cdots p_\ell$$

hvor p_i er indbyrdes forskellige primtal af formen $p_i = 2^{2^{k_i}} + 1$.

Vi skal bevise dette – i hvert fald i tilfældet hvor n selv er et primtal – ved forelæsningerne, delvis baseret på materialet om kvadratiske legemsudvidelser i [Jøn]. Faktisk skrev Gauss ikke noget bevis ned for at betingelsen på n er nødvendig (det første bevis skulle findes i [Wan]).

Som et partielt svar på Spørgsmål 2.1 kan vi således notere, at for n op til 20 kan vi konstruere de regulære polygoner med

$$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20$$

sider. Bemærk at den regulære 17-kant er konstruerbar. Denne Gauss' tilføjelse til listen over konstruerbare polygoner var den første i over 2000 år!

Noter 2.5 *Vi er imidlertid ikke helt færdige med Spørgsmål 2.1, fordi det er et åbent spørgsmål hvor mange af disse, såkaldte fermatske, primtal der findes. Sætter vi*

$$f_n = 2^{2^n} + 1$$

er det muligt ved direkte udregninger at checke at alle tal

$$f_0 = 3, f_1 = 5, f_2 = 17, f_3 = 257, f_4 = 63537$$

er primtal. Derimod gælder

$$f_5 = 4294967297 = (2^7 \cdot 5 + 1)(2^7 \cdot 3 \cdot 17449 + 1),$$

og ved at inddrage tricks af typen beskrevet på [Jøn, pp. 6-7] har man vist at alle fermat tal $f_5, \ldots, f_{22}$ *er sammensatte. Tal som* f_{23} *er så astronomiske at man endnu - så vidt jeg ved - ikke har kunnet afklare om de er primtal eller ej, men for andre* $n \geq 23$ *har man haft held til at vise at* f_n *er sammensat ved andre metoder. Rekorden er vist nok at* f_{23471} *er sammensat.*

2.3 Eksistens af konstruktioner

I denne sektion vil vi være i stand til at ved elementære, omend meget lange, udregninger, bestemme en følge af andengradsligninger der viser at $\alpha_{17}, \alpha_{257}, \alpha_{65537} \in \mathfrak{K}$ og, i hvert fald i princippet, sætter os i stand til at bestemme konkrete udtryk for dem. Sammenholdt med beviset for Proposition 2.2 vil dette føre frem til en konstruktion af de regulære polygoner med 17, 257 og 65537 kanter.

Lad os kikke nærmere på tilfældet $n = 17$ og indtil videre skrive $\alpha = \alpha_{17}$. Gauss' konstruktion baserer sig på en ordning af de seksten ikke-trivielle løsninger til ligningen $z^{17} = 1$:

$$\alpha^1, \alpha^{16}, \alpha^{13}, \alpha^4, \alpha^9, \alpha^8, \alpha^{15}, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^{14}, \alpha^5, \alpha^{12}, \alpha^{10}, \alpha^7, \alpha^{11}, \alpha^6 \tag{7}$$

Denne rækkefølge fremkommer ud fra nedenstående tabel, men tillad mig at være lidt hemmelighedsfuld omkring dens definition og dens egenskaber.

m [binær]	0000	1000	0100	1100	0010	1010	0110	1110
m [decimal]	0	8	4	12	2	10	6	14
$3^m \mod 17$	1	16	13	4	9	8	15	2
m [binær]	0001	1001	0101	1101	0011	1011	0111	1111
m [decimal]	1	9	5	13	3	11	7	15
$3^m \mod 17$	3	14	5	12	10	7	11	6

Ideen med konstruktionen er at hvis summen og produktet af to tal er kendt så kan vi bestemme de to tal ved at løse en andengradsligning. Vi ønsker at bestemme α, og går frem ved at se på

$$\alpha\alpha^{16} = 1 \qquad \alpha + \alpha^{16}$$

Vi kender altså produktet, men ikke summen. Men hvis vi ganger summen $\alpha + \alpha^{16}$ med nabosummen i (7) får vi

$$(\alpha + \alpha^{16})\,(\alpha^{13} + \alpha^4) = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^{12} + \alpha^{14}$$

Vi kender endnu hverken sum eller produkt, men bemærker at de begge kan findes som 4 på hinanden følgende tal i (7). Fortsætter vi med at gange disse grupper af tal med deres naboer, fx først med summen herover, får vi

$$(\alpha + \alpha^{16} + \alpha^{13} + \alpha^4)\,(\alpha^9 + \alpha^8 + \alpha^{15} + \alpha^2) = \\ \alpha^{16} + \alpha^{15} + \alpha^{14} + \alpha^{13} + \alpha^{12} + \alpha^{11} + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$$

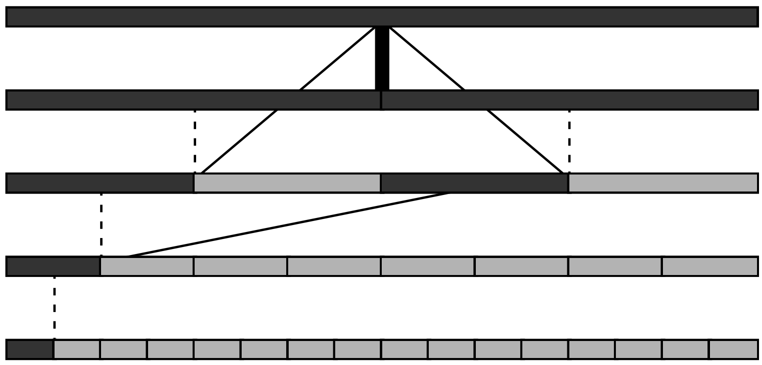
og her kender vi faktisk højresiden; den er -1 på grund af

$$(1-\alpha)\sum_{n=0}^{16} \alpha^n = 0,$$

der jo medfører at de sytten enhedsrødder summerer til 0. Et tilsvarende mønster viser sig hvis vi opdeler de seksten tal i to summer med otte led hver, for

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \alpha^{16} + \alpha^{13} + \alpha^4 + \alpha^9 + \alpha^8 + \alpha^{15} + \alpha^2)\,(\alpha^3 + \alpha^{14} + \alpha^5 + \alpha^{12} + \alpha^{10} + \alpha^7 + \alpha^{11} + \alpha^6) \\
&= \; 4\,\alpha^{16} + 4\,\alpha^{15} + 4\,\alpha^{14} + 4\,\alpha^{13} + 4\,\alpha^{12} + 4\,\alpha^{11} + 4\,\alpha^{10} + 4\,\alpha^9 + 4\,\alpha^8 + 4\,\alpha^7 + 4\,\alpha^6 \\
&+ \; 4\,\alpha^5 + 4\,\alpha^4 + 4\,\alpha^3 + 4\,\alpha^2 + 4\,\alpha
\end{aligned}$$

Faktisk har den rækkefølge af rødderne som vi benyttede i (7) den egenskab, at hvis vi med en *periode* $s_{i,j}$ henviser til summen af 2^i på hinanden følgende tal, der starter på plads $j \cdot 2^i + 1$, så er både sum og produkt af en periode med en af dens naboperioder altid en heltalskombination af længere perioder. Og da den længste periode har sum -1 giver en analyse af perioderne en måde at bestemme den syttende enhedsrod. Situationen kan beskrives diagrammatisk som på Figur 3 — de fuldt optrukne streger viser hvilken periode det anførte produkt indeholder, de stiplede linjer indikerer det samme for summerne, og perioderne er farvekodet således



Figur 3: $n = 17$

at de mørkegrå perioder er netop dem det er nødvendigt at udregne for at nå vores mål; den nederste periode til venstre. Herved kommer vi frem til ligningssystemet

$$\begin{gathered}
s_{4,0} = -1 \\
{s_{3,1}}^2 - s_{4,0}\, s_{3,1} + 4\, s_{4,0} = 0 \\
{s_{2,2}}^2 - s_{3,1}\, s_{2,2} + s_{4,0} = 0 \\
s_{3,0} = s_{4,0} - s_{3,1} \\
{s_{2,0}}^2 - s_{3,0}\, s_{2,0} + s_{4,0} = 0 \\
{s_{1,0}}^2 - s_{2,0}\, s_{1,0} + s_{2,2} = 0 \\
{s_{0,0}}^2 - s_{1,0}\, s_{0,0} + 1 = 0
\end{gathered}$$

der uden videre løses, idet vi benytter numeriske metoder til at vælge de rigtige rødder undervejs, ud fra (2). Vi får

$$\begin{aligned}
s_{3,1} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx -2.56 \\
s_{2,2} &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sqrt{17 + \sqrt{17}}\,\sqrt{2} \approx 0.34 \\
s_{3,0} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} \approx 1.56 \\
s_{2,0} &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sqrt{17 - \sqrt{17}}\,\sqrt{2} \approx 2.05 \\
s_{1,0} &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{17 - \sqrt{17}}\,\sqrt{2} \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{34 + 6\sqrt{17} + (\sqrt{17} - 1)\sqrt{17 - \sqrt{17}}\,\sqrt{2} - 8\sqrt{17 + \sqrt{17}}\,\sqrt{2}} \\
&\approx 1.86
\end{aligned}$$

og et udtryk for $\alpha_{17} = s_{0,0}$ der er lidt for langt til at bringe her.

Man kan nu bemærke at hele denne proces er fuldstændig mekanisk, og at den kan generaliseres til at bestemme α_{257} og α_{65537}. Et diagram over processen for $n = 257$ ses på Figur 4; bemærk at det kun er en brøkdel af perioderne vi bliver nødt til at udregne, sådan at det totale antal af andengradsligninger kan holdes nede på 24:

$$\begin{gathered}
s_{8,0} = -1 \\
{s_{7,0}}^2 - s_{8,0}s_{7,0} + 64s_{8,0} = 0 \\
s_{7,1} = s_{8,0} - s_{7,0} \\
{s_{6,1}}^2 - s_{7,0}s_{6,1} + 16s_{8,0} = 0 \\
s_{6,0} = s_{7,0} - s_{6,1} \\
{s_{5,1}}^2 - s_{6,0}s_{5,1} + 2s_{8,0} + 3s_{7,1} + 2s_{6,1} = 0 \\
\vdots \\
{s_{1,0}}^2 - s_{2,0}s_{1,0} + s_{2,7} = 0 \\
{s_{0,0}}^2 - s_{1,0}s_{0,0} + 1 = 0
\end{gathered}$$

Tykkelsen af de fuldt optrukne streger illustrerer (logaritmisk!) med hvilken vægt de forskellige perioder indgår i produkterne. I tilfældet $n = 65637$ skal der løses i alt 1142 andengradsligninger. Figurerne 5 og 6 skulle give et godt indtryk af kompleksiteten her. Bemærk at de stiplede linjer er udeladt og at de fuldt optrukne har konstant tykkelse.

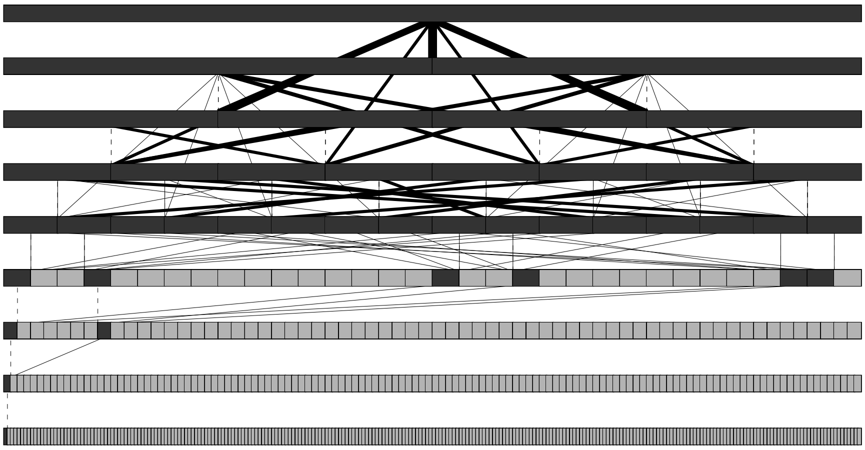
Noter 2.6 *Opgaven med at multiplicere perioder for derved at bestemme andengradsligningerne løses lettest med et computeralgebraværktøj som Maple. Desværre er udregningerne undervejs, især i tilfældet $n = 65637$, så omfattende at denne løsning er alt for langsommelig, selv på meget stærke computere.*

Det er derfor nødvendigt at skrive et program der direkte løser opgaven. Jeg har benyttet et all-purpose *sprog som C til at foretage de tidskritiske beregninger, og siden eksporteret resultaterne som rå tekst til mere specialiserede programpakker, der kan viderebehandle dem. Herved kunne jeg i tilfældet $n = 65537$ finde alle andengradsligningerne i løbet af 20 minutter (på en helt almindelig computer). Det benyttede C program kan studeres på [Eil].*

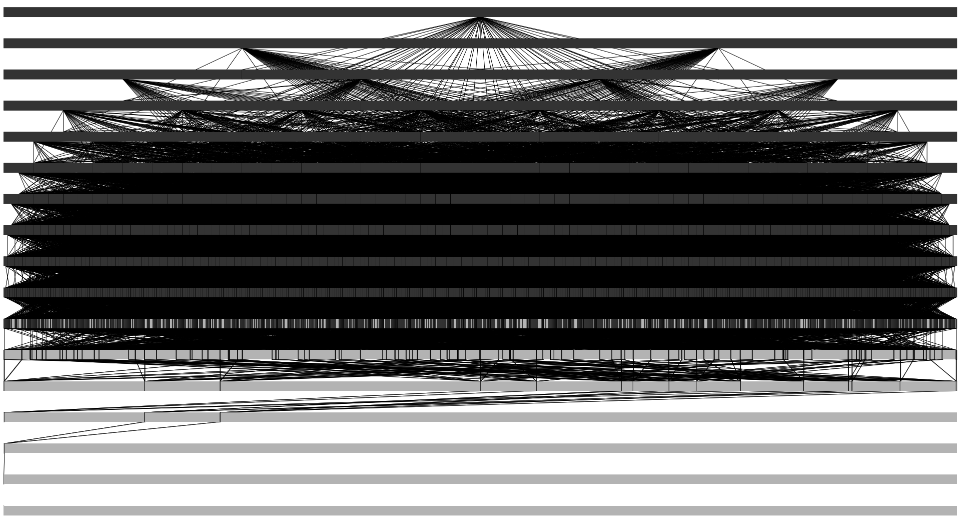
Noter 2.7 *Hvis man ikke har mod på [GaL] eller [GaE] så er der en glimrende beskrivelse af Gauss' fremgangsmåde i [You].*

2.4 Konkrete konstruktioner

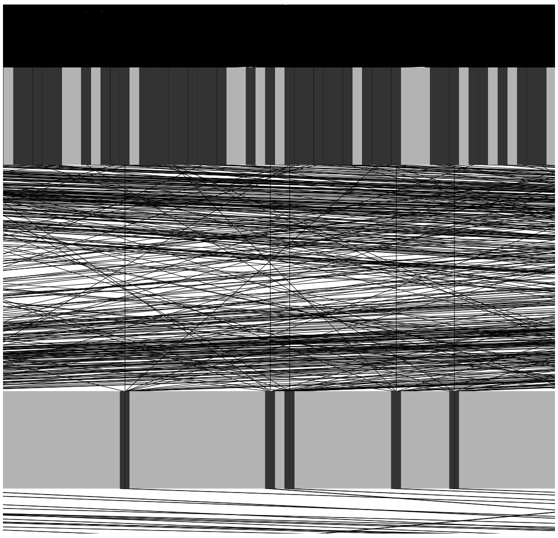
Det er lykkedes os at generere en række andengradsligninger, der kan føre frem til udtryk for enhedsrødderne af orden 17, 257 og 65357. Dermed har vi eftervist



Figur 4: $n = 257$



Figur 5: $n = 65637$



Figur 6: $n = 65637$, zoom

at $\alpha_{17}, \alpha_{257}, \alpha_{65357}$ ligger i $\mathfrak{K}$, og altså at de tilhørende polygoner er konstruerbare. Ved at løse ligningerne i et computeralgebraværktøj kan vi finde udtryk for de syttende, tohundresyvoghalvtredsindstyvende og femogtrestusindetrehundreesyvogtredivte enhedsrødder der ikke involverer andet end de fire regningsarter, og kvadratrod, på nogle helt konkrete tal.

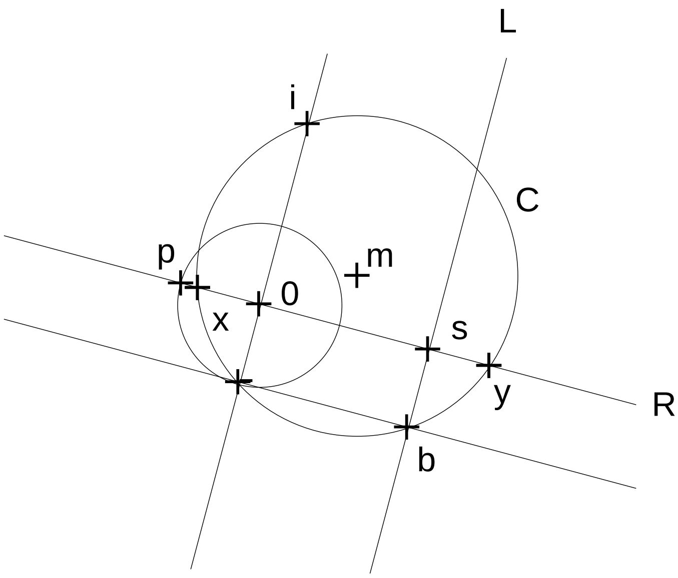
Derfor kan vi i princippet benytte disse udtryk til at konstruere de tilsvarende polygoner. Men den som har prøvet at konstruere den regulære femkant ud fra udtrykket i (5) vil vide at dette vil være en voldsom opgave.

Det er meget nemmere at gå frem ved at konstruere perioderne; bemærk at disse er reelle tal undtagen på det allernederste niveau. Fra det forrige afsnit ses at hvis vi kan

- Bestemme punkter svarende til summer af allerede konstruerede punkter
- Konstruere punkter svarende til to reelle tal hvis sum og produkt allerede er konstruerede

så kan vi løse opgaven. Den første af disse opgaver er let at løse, og den anden klares elegant med de såkaldte *Carlyle cirkler*. Denne simple konstruktion, illustreret på Figur 7, giver det ønskede. Algoritmisk kan de beskrives som følger, hvor vi ud over summen $s \in \mathbb{R}$ og produktet $p \in \mathbb{R}$ også forestiller os at et punkt svarende til tallet i er givet:

Givet punkter s, p, i.
Tegn linjen R gennem s og p. Oprejs den vinkelrette L til R gennem s.



Figur 7: Carlyle cirkler

Afsæt punktet b på L i afstand p fra s.
Afsæt punktet m halverende linjestykket $|ib|$
Afsæt cirklen C med centrum m og radius $|mb|$
Udsøg skæringpunkterne mellem C og R

Bemærk at punktet 0 findes ved at oprejse den virkelrette til R gennem i. De resulterende punkter svarer til de ønskede reelle tal x og y med egenskaberne $x + y = s$, $xy = p$.

A Opgaver i Elementa

Nedenstående liste opremser de opgaver i Elementa, det er nødvendigt at løse for at gennemføre projektet, da de er forudsætninger for de to opgaver i kapitlet om regulære polygoner som skal besvares. Der er andre opgaver undervejs som kan være lærerige at se på, men som altså kan springes over. Det anbefales at man benytter skemaet til at krydse af, når opgaverne markeret med "☐" er løst.

Visse af opgaverne er markeret med "■". En løsning af hver af disse opgaver er placeret hos hver deltager i Matematik YY. Hvis man ønsker at løse alting selv, skal man blot bede Elementa om at løse opgaven pány. Men bliver under alle omstændigheder nok nødt til at studere opgaverne i det omfang at man vil kunne se hvad de kan benyttes til i følgende opgaver.

1 Overblik

2 Linjer og cirkler

- ☐ Tegn linjerne
- ☐ Bestem skæringspunkterne
- ☐ Første prøve

3 Algoritme og bevis

- ☐ Bestem midtnormal
- ☐ Bestem midtpunkt
- ☐ Konstruer cirklen gennem punkterne

4 Cirkelbuer og vilkårlige punkter

- ☐ Bestem centrum
- ☐ Halver radien
- ☐ Find bagvedliggende cirkel
- ☐ Oprejs vinkelrette
- ☐ Parallelforskyd

5 Eksplicit dobbelthed og rette delobjekter

- ☐ Halver linjestykke

6 Advarsler og implicit dobbelthed

- ☐ Halver cirkel
- ☐ Halver indre vinkel

- ☐ Halver vinkel

7 Størrelsesforhold, vink og markering

- ☐ Konstruer retvinklet trekant
- ☐ Bestem gennemsnit
- ☐ Bestem fjerdeproportional
- ☐ Bestem mellemproportional

8 Udartede konfigurationer

- ☐ Tegn parallelogram
- ☐ Translater punkt
- ☐ Udartet translation (B=P), (B=A)
- ☐ Konklusion om udartethed

9 Affine transformationer

- ■ Spejl punkt i linje
- ■ Spejl punkt i punkt
- ■ Drej punkt indre vinkel
- ■ Drej punkt
- ■ Drej linje

10 Kompleks aritmetik

- ☐ Addition
- ☐ Negation
- ☐ Multiplikation
- ☐ Reciprok
- ☐ Kvadratrod

11 Regulære polygoner

- ☐ Indskriv femkant
- ■ Carlyle cirkel
- ☐ Indskriv syttenkant

Litteratur

[DeT] Duane W. DeTemple, *Carlyle circles and the Lemoine simplicity of polygon constructions*, Amer. Math. Monthly **98** (1991), no. 2, 97–108.

[Eil] Søren Eilers, *www.math.ku.dk/~eilers/regpoly.html*, 1999.

[EuD] Euklid, *Elementer*, Gyldendal, København, 1938. Oversat til dansk af Thyra Eibe.

[GaL] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, 1801.

[GaE] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Springer-Verlag, New York, 1986, translated and with a preface by Arthur A. Clarke, revised by William C. Waterhouse, Cornelius Greither and A. W. Grootendorst and with a preface by Waterhouse.

[Her] J. Hermes, *Über die teilung des kreises in 65537 gleiche teile*, Nachr. Königl. Gesellsch. Wissensch. Gött. Math.-Phys. Klasse (1894), 170–186.

[Jøn] Søren Jøndrup, *Mat YY - Elementær talteori*, forelæsningsnoter, Københavns Universitets Matematiske Institut.

[Pet] Julius Petersen, *Lærebog i den elementære Plangeometri*, 1896.

[ETP] Ebbe Thue Poulsen, *Funktioner af en og flere variable*, Gads Forlag, København 2001.

[Rlo] Richelot, *De resolutione algebraica aequationis $X^{257} = 1$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequates commutatio coronata*, J. reine angew. Math. **9** (1832), 1–26, 146–161, 209–230, 337–358.

[Rmo] H. W. Richmond, *A construction for a regular polygon of seventeen sides*, Quart. J. Pure Appl. Math. **26** (1893), 206–207.

[Wan] M. L. Wantzel, *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, J. Math. pures appliq. **1** (1836), 366–372.

[You] J. W. A. Young (ed.), *Monographs on topics of modern mathematics relevant to the elementary field*, Dover Publications Inc., New York, 1955.