OBLIGATORISK AFLEVERINGSOPGAVE 2

Dette er den 2. obligatoriske aflevering i DIS. Den skal afleveres **mandag d. 6. oktober** *i forelæsningen. Udover nedenstående opgave (i tre dele) stilles også* **opg. 10.2** *(fra kapitel 10 i noterne).*

Meningen med følgende opgaver er at du igennem flere trin guides til at bevise *Ramseys sætning*. Ramseys sætning kan man tænke på som en slags 2-dimensional version af skuffeprincippet (dueslagsprincippet).

Del 1. I et lokale er 6 personer netop samlet. Vis at der må være tre person som enten alle kender hinanden i forvejen, eller også er der tre personer som ikke kender hinanden i forvejen.

Hint: Udvælg en af personerne, lad os kalde ham/hende P. Da der er fem andre personer end P må der enten være 3 personer som alle tre kender P, eller tre personer som ikke kender P. Opdel beviset i de to tilfælde. I det første tilfælde kan det nu ske at de tre personer, som kender P, ikke kender hinanden, eller også kender to af dem hinanden. Dette er faktisk nok information til at færddiggøre beviset i dette tilfælde! Prøv så selv at lave behandle det andet tilfælde.)

Lad nu A være en endelig mængde og lad $R \subseteq A^2$ være en graf på A, dvs. en symmetrisk og irrefleksiv (binær) relation på A (se 7.1). (Husk at man, jævnfør 7.2, kan tænke på relationen R som en (ikke-orienteret[1]) graf på A.) Vi siger at $x, y \in A$, hvor $x \neq y$, er *forbundne* (i R) hvis xRy, og ellers siger vi at x og y ikke er forbundne.

Ramseys sætning. Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. Da findes der et $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, sådan at hvis A er en endelig mængde med mindst m elementer (dvs. $|A| \geq m$), og R er en vilkårlig graf på A, da findes en delmængde $B \subseteq A$ med $|B| = n$, sådan at alle par af (forskellige) elementer i B er forbundne, eller intet par af (forskellige) elementer i B er forbundne.

Del 2. Forklar hvorfor opgave 1 viser sætningen i tilfældet hvor $n = 3$.

Del 3. Vis Ramseys sætning.

Hint: Det er nemmere at vise en tilsyneladende stærkere version: For hvert $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ findes $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0, n_1$, sådan at hvis A er en vilkårlig mængde med mindst m elementer, og R er en graf på A, så findes der enten n_0 elementer i A som er forbundne, eller også findes der n_1 elementer i A som ikke er forbundne. (Hvis vi tager $n_0 = n = n_1$ følger Ramseys sætning.)

Vi vil vise dette udsagn ved induktion på $n_0 + n_1$. Hvis enten $n_0 = 1$ eller $n_1 = 1$ er sætningen triviel (hvorfor?). Derfor gælder sætningen for $n_0 + n_1 = 2$ eller $n_0 + n_1 = 3$. Antag nu at sætningen holder når $n_0 + n_1 = k \geq 3$. Nu skal sætningen så vises når $n_0 + n_1 = k + 1$. Vi kan selvfølgelig (hvorfor?) antage at $n_0, n_1 > 1$.

Lad $m_0 \in \mathbb{N}$ være sådan at hvis A er en mængde med mindst m_0 elementer, og R er en vilkårlig graf på A, så findes der enten $n_0 - 1$ parvis forbundne elementer, eller også findes der n_1 parvis

[1]Da R er antaget symmetrisk kommer hver kant i grafen R i par, så det er ikke nødvendigt at medtænke nogen orientering af grafen. Se i øvrigt bemærkning 216.

ikke-forbundne elementer. Lad tilsvarende $m_1 \in \mathbb{N}$ være sådan, at hvis A er en mængde på mindst m_1 elementer, og R er en graf på A, så findes der enten n_0 parvis forbundne elementer, eller også findes der $n_1 - 1$ parvis ikke-forbundne elementer.

Lad nu $m = m_0 + m_1$, og lad A være en mængde med mindst m elementer, R en graf på A. Vælg $x_0 \in A$. Konkluder, at der enten er m_0 elementer i $A \setminus \{x_0\}$, der alle er forbundne til x_0, eller også er der m_1 elementer i $A \setminus \{x_0\}$, som ikke er forbundne til x_0. Del nu op i de to tilfælde, og konkluder i hvert tilfælde at der enten er n_0 elementer, som alle er parvis forbundne, eller også er der n_1 elementer som er parvis ikke-forbundne. (Dette sidste trin burde minde dig en del om Del 1 ovenfor!)